Учебная программа по алгоритмам
СПбАУ, первый курс, 2016/17 учебный год

Факультативные темы
Выкинутые темы
Комментарии

Три семестра алгоритмов (1 лекция в неделю)

База

1. Асимптотика. Реккурентные соотношения. Суммы и интегралы.
2. Время работы программы. Неасимптотические оптимизации. Кеш.

Простейшие структуры данных

3. Массив фиксированного размера, списки, стек, очередь, дек, циклический массив.
4. Расширующийся динамический массив (вектор).
5. Амортизированное время работы, различные подходы к оценке времени работы.
6. Частичные суммы, минимумы, очередь с минимумом.
7. Бинарный поиск, два указателя, алгоритм Мо.
8. Хеш-таблицы на списках и с открытой адресацией.
9. Избавление от амортизации: вектор и хеш-таблица с $\mathcal{O}(1)$ в худшем случае.
10. Средства языка `C++`.
11. Бинарная куча. Сортирочка кучей. Построение за линию.
12. Аллокация памяти: общий случай, стек, список, оптимизация для `C++`.
13. Пополняемые структуры данных (`add` $\to$ `merge`; `build` $\to$ `add`). Пополняемый массив.
14. Разбор арифметического выражения за линейное время: рекурсивный разбор, разбор со стеком.

Сортировки и кучи

15. Квадратичные сортировки: вставками, выбором, пузырьком. Стабильность. Introsort.
16. Оценка снизу на число сравнений в сортировке, при построении бинарной кучи, в других алгоритмах.
17. Сортировка слиянием, нерекурсивная версия, число инверсий.
18. Быстрая сортировка Хоара, вероятностный алгоритм поиска порядковой статистики за линейное время.
19. Детерминированный алгоритм поиска порядковой статистики за линейное время.
20. Сортировка подсчётом, цифровая сортировка, сортировка вычёрпыванием (bucket sort).
21. Kirkpatrick Sort за $\mathcal{O}(n \log \log C)$.
22. Merge и sort без дополнительной памяти (inplace).
23. Min-Max куча, Левацкая (leftist) и косая (skew) кучи
24. Van Emde Boas Tree.
25. Биномиальная куча, куча Фибонччи.
26. Bootstrapping; ленивое добавление.

Динамическое программирование

27. Динамика: вперёд, назад, ленивая. Восстановление ответа. Ацикличный граф состояний.
28. Разбор стандартных задач: НОП, НВП, расстояние Левенштейна, задача о рюкзаке.
29. Динамика по подотрезкам, по деревьям.
30. Оптимизация памяти: восстановление ответа без дополнительных ссылок, хранение двух последних строк динамики, алгоритм Хиршберга.
31. Оптимизация времени: возведение матрицы в степень, два указателя, выбор состояния динамики.
32. Оптимизация Кнута, доказательство $p_{k-1,n} \le p_{k,n} \le p_{k,n+1}$ для задачи о серверах.
33. Операции с множествами, как с n-битовыми числами. Поиск старшего, младшего бита.
34. Динамика по подмножествам: задача о покрытии множества за $\mathcal{O}(2^n m)$, задача о покраске вершин графа за $\mathcal{O}(2.44^n)$, подсчёт аддитивной функции для всех подмножеств за $\mathcal{O}(2^n n)$.
35. Гамильтонов путь и цикл за $\mathcal{O}(2^n n)$. Задача коммивояжёра.
36. Динамика по профилю, по скошенному профилю.

Графы. DFS и BFS.

37. Хранение графов: матрица смежности, `bitset`, списки смежности, мультисписок (список на массиве).
38. DFS. Поиск путей, компонент связности, циклов, проверка на двудольность.
39. Топологическая сортировка, компоненты сильной связности, конденсация графа.
40. Компоненты вершинной и рёберной двусвязности, мосты и точки сочленения.
41. Эйлеров путь/цикл, 2-SAT, 2-List-Coloring.
42. Транзитивное замыкание графа за $\mathcal{O}(\frac{nm}{w})$ (с использованием битового сжатия).
43. BFS. Поиск кратчайшего пути в невзвешнном графе.
44. Модификации BFS для взвешенных 0-1, 1-k, 0-k, a-b графов.

Введение в сложность, вероятностные алгоритмы

45. Классы P, NP, NPc, NPh. L, EXP, PSPACE. Decision/search problems. Сведения.
46. Примеры NP-трудных задач: Hamilton Path, 3-SAT, Max-Clique, Knapsack.
47. Сведения: сортировка $\to$ куча; Гамильтонов путь $\to$ кратчайший путь в произвольном взвешенном графе; Knapsack $\to$ реальная задача.
48. Las Vegas algorithm, Monte Carlo algorithm
49. Randomized algorithm & Probablistic algorithm. Zero-Side-Error, One-Side-Error, Two-Side-Error.
50. Классы ZPP, BPP, RP, coRP.
51. Понижение ошибки. ZPP = RP $\cap$ coRP.
52. Примеры: 3-List-Coloring за $\mathcal{O}(1.5^n)$, quick-sort, hash table.

Графы. Кратчайшие пути.

53. Дейкстра, Флойд, Форд-Беллман.
54. Алгоритм A*, оптимизации Форд-Беллмана (randomshuffle, SPFA, Левит).
55. Поенциалы. Джонсон. Гольдберг (кратчайший путь за $\mathcal{O}(m\sqrt{n}\log N)$.
56. Поиск отрицательных циклов, циклом минимального среднего веса.
57. Алгоритм Карпа, алгорит Йена.

DSU, MST, Жадность

58. Система непересекающихся множеств (DSU) на списках, на деревьях.
59. Доказательство времени работы DSU “обратная функция Аккермана”. Доказательство времени работы CHM без ранговой эвристики.
60. Минимальное остовное дерево (MST): лемма о разрезе, алгоритм Краскала, алгоритм Прим, алгоритм Борувки.

61. Приближённые алгоритмы. 2-`OPT` и 1.5-`OPT` алгоритмы для задачи коммивояжёра.
62. $\ln n$-`OPT` для задачи о покрытии множества. 2-`OPT` для вершинного поккрытие. $\frac{11}{9}$-`OPT` $+1$ для задачи "bin packing".
63. Жадность. Хорновские формулы. Правило Варнсдорффа (гамильтонов путь и цикл).
64. Алгоритм Хаффмана. Хранение дерева
65. Задачи на сортировку, на вывод компаратора. Задача о двух станках.
66. Несколько задач из теории расписаний. Задача о выполнении максимального числа заданий с данными дедлайнами, решение за $\mathcal{O}(n \log n)$ с доказательством.

Деревья поиска, деревья отрезков

67. Дерево поиска: add/del, find, next/prev, прошивка дерева, хранение прямым обходом. Все операции кроме add за $\mathcal{O}(1)$, сортировка, lowerbound на время add: $\mathcal{O}(\log n)$.
68. Дерево по неявному ключу, функция на отрезке, reverse на отрезке.
69. AVL-Tree, Treap, RB-Tree, B-Tree, AA-Tree, 2-3-Tree
70. Treap: оценка срердней глубины вершины и максимальной глубины вершины
71. Splay-Tree (с доказательством), Skip-List, Rope
72. Персистентность: дерево, массив, очередь, CHM. Treap $\to$ RBST.
73. Offline персистентность. Сборка мусора для персистентных структур.
74. Дерево отрезков. Реализации снизу, сверху. Групповые операции.
75. Дерево Фенвика. Многомерное дерево Фенвика.
76. Динамическое (разреженное) дерево отрезков. Дерево отрезков сортированных массивов.
77. Fractional cascading. Двухмерные деревья.
78. Сканирующая прямая, персистентная сканирующая прямая. Обработка 2D-ортогональных запросов.
79. k-я статистика на отрезке в online за $\mathcal{O}(\log n)$.

Задачи RMQ и LCA

80. Centroid decomposition, функции на пути дерева.
81. RMQ. Sparse Table за $\langle \mathcal{O}(n \log n), \mathcal{O}(1) \rangle$, за $\langle \mathcal{O}(n \log \log n), \mathcal{O}(1) \rangle$, за $\langle \mathcal{O}(n \log^* n), \mathcal{O}(\log^* n) \rangle$.
82. LCA. Алгоритм Фараха-Колтона-Бендера: RMQ $\overset{\mathcal{O}(n)}{\to}$ LCA $\overset{\mathcal{O}(n)}{\to}$ RMQ$\pm$1, решение RMQ$\pm$1 за $\langle O(n), O(1) \rangle$
83. LCA. Offline алгоритм Тарьяна. LCA двоичными подъёмами.
84. LA. Offline решения. Алгоритм Вышкина за $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(\log n) \rangle$.
    Ladder-decomposition, алгоритм за $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(1) \rangle$.
85. Heavy-Light-Decomposition (HLD).
86. Эйлеров обход: Euler-Tour-Trees, функция на поддереве, сумма на пути дерева.
87. Link-Cut-Tree.
88. Рандомизированный алгоритм для MST за $\mathcal{O}(n+m)$, минимум на пути дерева в offline за $\mathcal{O}(n+m)$.

Графы. Паросочетания, расркаски, потоки, разрезы

89. Паросочетание, контролирующее множество, независимое множество в двудольном графе.
90. Теорема Кёнига, лемма о дополняющем пути, алгоритм Куна.
91. Классификация рёбер двудольного графа по принадлежности паросочетанию. Теорема Дилворта. Лексмин паросочетание.
92. Stable matching (marriage problem).
93. Вершинные раскраски: Брукс (без док-ва), теоремы о 5 и 4 красках. Жадные алгоритмы.
94. Рёберная раскраска: теорема и алгоритм Визинга (без док-ва), покраска рёбер двудольного графа.
95. Теорема и алгоритм Форда-Фалкерсона. Поиск разреза.
96. Алгоритмы Эдмондса-Карпа, масштабирования потока, Диница.

97. Теорема Карзанова, алгоритм Хопкрофта-Карпа.
98. Проталкивание предпотока. High-Level optimization. Global relabeling. Алгоритм Ahuja за $\mathcal{O}(nm+n^2 \log U)$.
99. Min cost flow. Использование Форд-Белмана, Дейкстры для поиска пути.
100. Min cost flow: capacity scaling, cost scaling, negative cycle canceling.
101. Венгерский алгоритм поиска паросочетания
102. Глобальный разрез: Штор-Вагнер, Каргер-Штейн.

Строки. Базовые алгоритмы и суффиксные структуры.

103. Z-функция, prefix-функция, КМП. Алгоритм Боера-Мура.
104. Полиномиальные хеши. Рабин-Карп. Строгие оценки на вероятности, выбор хеша.
105. Задача о наибольшей общей подстроке.
106. Палиндромы: алгоритм Манакера, дерево Палиндромов.
107. Бор. Сжатый бор. Ахо-Корасик.
108. Суффиксный массив: алгоритм за $\mathcal{O}(n)$, алгоритм Каркайнена-Сандерса
109. Суффиксное дерево: алгоритм Укконена.
110. Суффиксный автомат.
111. Преобразования суффмассив $\leftrightarrow$ суффдерево $\leftrightarrow$ суффавтомат

Игры на графах. Автоматы.

112. Ацикличный граф. Цикличный графа, ретроанализ.
113. Прямая сумма игр: функция Гранди.
114. Игра на дереве. AB-отсечение.
115. Игра на полном бинарном дереве с весом игры из $\{0, 1\}$ за $\mathcal{O}(1.687^n)$.
116. Проверка деревьев на изоморфизм. Проверка графов на изоморфизм.

Алгоритмы для математиков

117. Быстрое дискретное преобразование Фурье над полем корней из единицы.
118. Обратное Фурье. Два вещественных в одном. Точность вычислений.
119. Нерекурсивная реализация. Другие неасимптотические оптимизации.
120. Задачи на Фурье: поиск строк, картинок, скалярные произведения циклических сдвигов.
121. Фурье над полем остатков по простому модулю.
122. Длинная арифметика: умножение, деление, извлечение корня за $\mathcal{O}(n \log n)$.
123. Метод Гаусса. Ортоганализация Грамма-Шмидта. Координаты вектора в базисе.
124. Гаусс над кольцом целых чисел, кольцом остатков по непростому модулю.
125. Умножение матриц над $\mathbb{F}_2$ за $\mathcal{O}(\frac{n^3}{w \log n})$.
126. Битовое сжатие для деления/умножения многочленов, Гаусса.
127. Решето Эратосфена. Расширенный алгоритм Евклида. Основные операции по модулю. КТО.
128. Проверка чисел на простоту. Тест Миллера-Рабина.
129. Первообразный корень. Дискретное логарифмирование. Извлечение корня.
130. Факторизация числа: p-эвристика;