

# Вопросы к экзамену по алгоритмам

## SPb HSE, 1 курс, март 2021

### Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) темы на 3 (оценка 4-5).
- (b) темы на 4 (оценка 6-7).
- (c) темы на 5 (оценка 8-9).
- (+) факультативные темы (оценка 10) – нужно заботать 2 любых темы из 6.

### DFS

- (a) 1. DFS. Хранение графа (`vector<vector>`, `bitset`, `set`, сравнение способов). Собственно dfs. Восстановление пути в dfs.
- (c) 2. DFS. Хранение графа: мультисписок. Сравнение с `vector<vector>`.
- (a) 3. DFS. Компоненты сильной связности. Тривиальный алгоритм за  $\mathcal{O}(VE)$ . Конденсация, построение за  $\mathcal{O}(V + E)$  по данным компонентам.
- (b) 4. DFS. Компоненты сильной связности. Алгоритм за  $\mathcal{O}(V + E)$  без доказательства корректности. Конденсация. Применение к поиску матрицы достижимости за  $\mathcal{O}(VE/w)$ .
- (b) 5. DFS. Эйлеров цикл. Эйлеров путь. Случай ориентированного и неориентированного графа. Поиск за  $\mathcal{O}(V + E)$ . Ленивое удаление рёбер.
- (b) 6. DFS. Раскраска вершин графа в  $k$  цветов. Сложность задачи для разных  $k$ . Жадное решение за  $\mathcal{O}(V + E)$ .
- (a) 7. DFS. Мосты и точки сочленения. Тривиальный алгоритм за  $\mathcal{O}(VE)$ .
- (b) 8. DFS. Мосты и точки сочленения. Алгоритм за  $\mathcal{O}(V + E)$  без доказательства корректности.
- (b) 9. DFS. Двусвязность: вершинная и рёберная. Два определения: через удаление объектов, через отношение эквивалентности.
- (c) 10. DFS. Мосты и точки сочленения, сильная связность. Доказательство корректности линейных алгоритмов.
- (c) 11. DFS. Двусвязность: вершинная и рёберная. Алгоритм со стеком поиска компонент за  $\mathcal{O}(V + E)$ .
- (a) 12. DFS. 2-SAT. Определение задачи. Решение за  $\mathcal{O}(VE)$  «попробуем».
- (b) 13. DFS. 2-SAT. Решение за  $\mathcal{O}(V + E)$  без доказательства. Примеры задач: 2-LIST-COLORING, расположение геометрических объектов без наложений.
- (c) 14. DFS. 2-SAT. Доказательство корректности решения за  $\mathcal{O}(V + E)$ .

### Теория сложности, рандомизированные алгоритмы

- (a) 15. NP. Формулировки задач Halting Problem,  $k$ -CLIQUE, HAM-PATH, PRIME, IS-SORTED. В каких классах лежат?
- (a) 16. NP. Понятие языка, decision-задачи, search-задачи. Определения P, NP, EXP. Решение search-версии через decision-версию. Формулировки задач:  $k$ -CLIQUE, MAX-CLIQUE.
- (b) 17. NP. Неразрешимость Halting Problem.
- (b) 18. NP. Определение DTime, P, EXP. Теорема об иерархии по времени (без доказательства). Доказательство  $P \neq EXP$ .

- (c) 19. NP. Доказательство теоремы об иерархии по времени. **Билет отменили. Радуйтесь.**
- (a) 20. NP. Классы NP, NP-hard, NP-complete.  
Задача: пусть  $k\text{-IND} \in \text{NPh}$ , докажите, что  $k\text{-CLIQUE} \in \text{NPc}$ .
- (b) 21. NP. Полиномиальное сведение. Свойства полиномиального сведения.
- (b) 22. NP. Доказательство существования NP-полных задач.  $\text{VN} \in \text{NPc}$ .
- (b) 23. NP. Сведения  $3\text{-SAT} \rightarrow k\text{-IND} \rightarrow k\text{-CLIQUE} \rightarrow \text{VERTEX-COVER}$ . Что следует из этих сведений?
- (b) 24. NP. Сведения  $\text{VN} \rightarrow \text{CIRCUIT-SAT} \rightarrow \text{SAT} \rightarrow 3\text{-SAT}$ . Что следует из этих сведений?
- (b) 25. NP. Решение search-версий SAT и  $k\text{-INDEPENDENT-SET}$  через decision-версии. Использование SAT-солверов.
- (b) 26. NP, Гипотезы ETH, SETH. Формулировки. *Следствия ETH  $\Rightarrow P \neq \text{NP}$ .*
- (c) 27. NP,  $\text{coNP}$ ,  $\text{coNEXP}$ . Сведение по Куку.
- (c) 28. Models. Машина Тьюринга.
- (c) 29. Models. RAM-машина. RAM-w-машина.
- (a) 30. RP. Классы RP,  $\text{coRP}$ , связь с классом NP. Класс ZPP. Понижение ошибки.
- (a) 31. RP. Задачи: самый частый элемент, 3-LIST-COLORING, matrix multiplication testing.
- (b) 32. RP. Задачи: поиск невычета, тест Ферма, тест Миллера Рабина.  
Все оценки вероятностей лишь постулируются, не доказываются.
- (b) 33. RP. Теорема  $\text{ZPP} = \text{RP} \cap \text{coRP}$ . Вложение классов. Три открытых вопроса.
- (c) 34. RP. Класс BPP. Понижение ошибки. Доказательство.
- (a) 35. RP. Алгоритм Полларда за  $\mathcal{O}(n^{1/4} \log n)$  арифметических операций. Без обоснований.
- (b) 36. RP. Алгоритм Полларда за  $\mathcal{O}(n^{1/4})$  арифметических операций с обоснованием. Парадокс дней рождений, анализ вероятности в две стороны.
- (b) 37. RP. Решение 3-SAT. Детерминированный и рандомизированные алгоритмы за  $1.73^n$  (с доказательством).
- (c) 38. RP. Решение 3-SAT. Рандомизированный алгоритм за  $1.5^n$  и  $1.34^n$  (с доказательством).  
Приближенный алгоритм для MAX-3-SAT.
- (c) 39. RP. Решение 3-SAT. *Приближённые алгоритмы для MAX-3-SAT в общем случае, и в случае, когда в каждом клوزه минимум 3 литерала.*
- (c) 40. RP. Лемма Шварца-Зипшеля (только формулировка). Применение: матрица Татта и поиск совершенного паросочетания (поиск паросочетания тоже).
- (a) 41. RP. Идеальное кодирование. Вычисление средней зарплаты без разглашения.
- (b) 42. RP. Random shuffle массива. Игра на 0-1-дереве, min-max-игра на дереве.

## Графы

- (a) 43. Path. Поиск в ширину. Решение очередью. Дерево кратчайших путей. Восстановление пути.
- (b) 44. Path. 0-1-k bfs (и его частей 1-k, 0-1).
- (c) 45. Path. *Вещественные 1-2 и 0-1 bfs-ы. Поиск в ширину за  $\mathcal{O}(\frac{V^2}{w})$ . 1-k bfs за  $\mathcal{O}(E \log k)$ .*
- (a) 46. Path. Дейкстра. Алгоритм. Доказательство. Решение за  $\mathcal{O}(E \log V)$ ,  $\mathcal{O}(V^2 + E)$ ,  $\mathcal{O}(E + V \log V)$ .
- (b) 47. Path. Алгоритм  $A^*$ . Доказательство для графов с неравенством треугольника. Сравнение с Дейкстрой. Когда  $A^*$  лучше?
- (a) 48. Path. Флойд. Решение за  $\mathcal{O}(V^3)$ . Восстановление пути. Корректность.
- (b) 49. Path. Флойд. Поиск отрицательных циклов. *Транзитивное замыкание за  $\mathcal{O}(\frac{V^3}{w})$ .*
- (a) 50. Path. Форд-Беллман за  $\mathcal{O}(VE)$  и  $V^2$  памяти. Восстановление пути.
- (b) 51. Path. Форд-Беллман. Переход к линейной памяти. Версия с break и версия с очередью (без доказательства времени работы).

- (c) 52. Path. Форд-Беллман. random-shuffle. Оценки и доказательства времени работы в разных случаях: с break, с разными random shuffle, с очередью.
- (c) 53. Path. Форд-Беллман и отрицательные циклы. Поиск, доказательство корректности.
- (b) 54. Path. Идея потенциалов. Применение для APSP: алгоритм Джонсона.
- (b) 55. Path. Поиск цикла минимального среднего веса. За  $\mathcal{O}(VE \log C)$ .
- (c) 56. Path. Поиск цикла минимального среднего веса. За  $\mathcal{O}(VE)$ . Алгоритм Карпа.
- (a) 57. MST. Алгоритм Краскала без доказательства. Время работы.
- (a) 58. MST. Алгоритм Прима без доказательства. Время работы.
- (b) 59. MST. Лемма о разрезе. Краскал. Прим. Доказательства.
- (c) 60. MST. Алгоритм Борувки. Оценка времени работы  $\mathcal{O}(E \log(V^2/E))$ . Доказательство корректности.
- (a) 61. DSU. Постановка задачи и реализация на списках. Время работы без доказательства.
- (b) 62. DSU. На списках доказательство времени работы  $\mathcal{O}(m + n \log n)$ .
- (b) 63. DSU. Реализация деревьями. Две эвристики.
- (b) 64. DSU. Реализация деревьями. Доказательство оценки  $\mathcal{O}(\log n)$  для сжатия путей.
- (b) 65. DSU. Реализация деревьями. Доказательство оценки  $\mathcal{O}(\log n)$  для ранговой.
- (c) 66. DSU. Доказательство  $\mathcal{O}((m + n) \log^* n)$  для двух эвристик одновременно.
- (c) 67. DSU. Доказательство  $\mathcal{O}(m + n \log^* n)$  для двух эвристик одновременно.

### Жадности и приближенные алгоритмы

- (a) 68. TSP. 2-ОПТ решение.
- (b) 69. TSP. 1.5-ОПТ решение.  $\Delta$  алгоритма если нет неравенства треугольника.
- (b) 70. Правило Варнсдорфа для частного случая. Применение к общему случаю.
- (a) 71. Алгоритм Хаффмана, доказательство, реализация кучей за  $\mathcal{O}(k \log k)$ .
- (b) 72. Поиск кодов по массиву частот за  $\mathcal{O}(\text{sort}(k) + k)$ . Хранение кодов.
- (a) 73. Жадность. Задачи на сортировку. Способы доказательства – через swap соседних и через выбор первого/последнего элемента с примерами.
- (a) 74. Жадность. Задачи на сортировку. Примеры: непрерывный рюкзак, файлы на ленте, выполнить побольше задач с общим дедлайном, *башня из спортсменов*.
- (b) 75. Жадность. Задания с дедлайнами: выполнить все за  $\mathcal{O}(n \log n)$ , выполнить максимум за  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- (c) 76. Жадность. Задания с дедлайнами: выполнить максимум. Решение  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Доказательство корректности.
- (b) 77. Жадность. Задача про два (упорядоченных) станка. Формулировка. Корректное решение без доказательства.
- (a) 78. Рюкзаки. Формулировки: partition, balanced partition, knapsack, bin packing.
- (a) 79. Рюкзаки. В предположении NP-трудности partition показываем трудность balanced partition, knapsack, bin packing.
- (a) 80. Partition. Жадное решение (без оценки).
- (a) 81. Partition. Алгоритм Кармаркар-Карпа (без оценок).
- (b) 82. Partition. PTAS-схема.
- (c) 83. Partition. Оценка жадности  $\frac{5}{6}$  ОПТ, обоснование  $\mathcal{O}(n^{-\log n})$  для Кармаркар-Карпа
- (b) 84. Knapsack. Жадность по удельной стоимости не даёт приближения. PTAS-схема.
- (c) 85. Knapsack. FPTAS-схема.
- (a) 86. BinPacking. Алгоритмы FF, BF, FFD, BFD. (First, Best, Decreasing версии). Доказательство того, что FF – 2-ОПТ.
- (c) 87. BinPacking. Практически эффективное решение. За  $\mathcal{O}(n \cdot \text{iterations})$ .

- (b) 88. BinPacking. Решение за полином для случая  $a_i \geq \varepsilon$ , различных  $\leq k$ .
- (c) 89. BinPacking. PTAS-схема – избавляемся от ограничений на  $\varepsilon$  и  $k$ .
- (a) 90. Set Cover.  $\ln(n)$ -приближение. Решения без доказательства.
- (b) 91. Set Cover.  $\ln(n)$ -приближение. Доказательство оценки.
- (c) 92. Set Cover.  $\ln(n)$ -приближение во взвешенном случае. Реализация за линейное время в невзвешенном случае. 2-ОПТ приближение для Vertex Cover.
- (b) 93. Задача о надстроке. Сведение к TSP. Простое жадное решение. Оценка.
- (c) 94. Задача о надстроке. Сведение к SetCover. Оценка ( $2 \ln n$ ).

## Центроиды

- (a) 95. Центроидная декомпозиция: построение за  $\mathcal{O}(n \log n)$  времени,  $\mathcal{O}(n)$  памяти.
- (b) 96. Центроидная декомпозиция: подробности хранения, LCA, поиск минимума на пути за  $\mathcal{O}(\log n)$  и  $\mathcal{O}(\log \log n)$ , поиск gcd на отрезке массива.
- (b) 97. Центроидная декомпозиция: Disjoint Sparse Table.
- (c) 98. Центроидная декомпозиция: количество путей длины  $d$ .
- (c) 99. Центроидная декомпозиция: покраска вершин на расстоянии  $\leq d$ .

## Бонус

- (+) 100. NP. Алгоритм Левина. Асимптотика времени работы. Область применения. ТЧ. Квадратный корень по простому модулю за  $\mathcal{O}(\log p)$ .
- (+) 101. Перебор. Расщепление для Independent Set. Пример использования весов для лучшей оценки расщеплений. Получить решение не хуже  $\mathcal{O}(1.3247^n)$ , лучше  $\mathcal{O}(1.25^n)$ .
- (+) 102. Path. A\* и Iterative Deepening для переборных задач. Сравнение. Beam Search. Применение к «калькулятору», «японскому компьютеру», редакционному расстоянию, распознаванию речи.
- (+) 103. Path. Гольдберг. Основная идея. Лечение одной вершины за  $\mathcal{O}(V + E)$ . Лечение пачки из хотя бы  $\sqrt{k}$  вершин за  $\mathcal{O}(V + E)$ . Доказательство асимптотики  $\mathcal{O}(E\sqrt{V})$  для  $w_e \geq -1$ , асимптотика  $E\sqrt{V} \log N$  в общем случае.
- (+) 104. DSU. Доказательство обратной функции Аккермана.
- (+) 105. Path. Алгоритм Йена на примере  $k$ -го пути (простого). Алгоритм Эпштейна для  $k$ -го пути (непростого).