Оценка матожидания глубины вершины в декартовом дереве

Оценим $p[n,k]$ – вероятность того, что в декартовом дереве из n вершин глубина всех вершин не более k. Заметим, что $p[1,k]=1$, $p[n,1]=0$. Предположим (пока без доказательства), что

$$p[n,k] \geqslant p[n{+}1,k] \tag{1}$$

$$p[a{+}b,k] \leqslant p[a,k] \cdot p[b,k] \tag{2}$$

Теперь запишем $p[n,k] = 1-\alpha[n,k]$ и докажем $p[n,k] \geqslant 1-2^{-Ak+B\log_2 n}$, где A, B – положительные константы, которые предстоит подобрать. По определению декартова дерева корень – случайная из n вершин. Значит, с вероятностью $\frac{1}{2}$ размеры и левого, и правого поддерева не более $\frac{3}{4}n$. Получаем

$$p[n,k] \geqslant \tfrac{1}{2}(p[\tfrac{3}{4}n, k{-}1] \cdot p[\tfrac{3}{4}n, k{-}1] + p[n, k{-}1]) \tag{3}$$

Здесь мы первый и последний раз воспользовались 1 и 2.

Лемма 1. *Простой факт* $p[a,b] \cdot p[c,d] \geqslant 1-\alpha[a,b]-\alpha[c,d]$

Доказательство. $\forall a,b>0\colon (1-a)(1-b) = 1-a-b+ab \geqslant 1-a-b$ ■

Теорема 1. *Глубина декартова дерева* $\exists A,B>0\colon p[n,k] \geqslant 1-2^{-Ak+B\log_2 n}$

Доказательство. По индукции. База:
$n=1 \Rightarrow p[n,k]=1 \geqslant 1-2^z (\forall z)$
$k=0 \Rightarrow p[n,k]=0 \geqslant 1-2^y (y \geqslant 0)$
Переход: используем предположение индукции, 3 и Lm 1, получаем

$$1-\alpha[n,k] = p[n,k] \geqslant \tfrac{1}{2}(p[\tfrac{3}{4}n,k{-}1] \cdot p[\tfrac{3}{4}n,k{-}1] + p[n,k{-}1] \geqslant \tfrac{1}{2}(1-2\alpha[\tfrac{3}{4}n,k{-}1] + 1 - \alpha[n,k{-}1]) \tag{4}$$

Осталось доказать, что $\frac{1}{2}(2\alpha[\frac{3}{4}n,k{-}1] + \alpha[n,k{-}1]) \leqslant \alpha[n,k]$
$\alpha[\frac{3}{4}n,k{-}1] = \alpha[n,k] \cdot 2^{A+B\log_2(\frac{3}{4})}$
$\alpha[n,k{-}1] = \alpha[n,k] \cdot 2^A$
$\frac{1}{2}(2\alpha[\frac{3}{4}n,k{-}1] + \alpha[n,k{-}1]) = \alpha[n,k] \cdot \frac{1}{2}(2 \cdot 2^{A+B\log_2(\frac{3}{4})} + 2^A) = \alpha[n,k] \cdot \frac{1}{2}2^A(1+2\cdot(\frac{3}{4})^B) = F$
При $A \to 0, B \to +\infty$ получаем $F = \alpha[n,k] \cdot \frac{1}{2}(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon) \leqslant \alpha[n,k]$ ■