$$T(n) = \max_{x=0\ldots n-1}(T(x) + T(n-x-1) + \min(k,x)\cdot\min(k,n-x-1))$$

$$T(n) \le \max_{x=0\ldots n}(T(x) + T(n-x) + \min(k,x)\cdot\min(k,n-x))$$

Берем бинарное дерево ($x = \frac{n}{2}$), на нем время работы алгоритма $= O(nk)$. Таким образом мы угадали ответ. Мы уже знаем, что $T(n) \le n^2$. Для $n \le k$ это нас устраивает.

Доказываем по индукции, что для $a \ge 1, a \in \mathbb{R}$, $n = a \cdot k$

$$T(n) \le (2a-1)\cdot k^2 = O(nk)$$

Пусть $x \le n - x$. Рассмотрим три случая. Везде ниже $x = y \cdot k, n = a \cdot k$

1. $x \ge k, n - x \ge k$

   $\min(k,x) = k$, $\min(k, n-x) = k$,

   $T(a\cdot k) \le (2y-1)\cdot k^2 + (2(a-y)-1)\cdot k^2 + k^2 = (2a-2)\cdot k^2 + k^2 = (2a-1)\cdot k^2$ $\square$

2. $x \le k, n - x \ge k$

   $\min(k,x) = x$, $\min(k, n-x) = k$,

   $T(n) \le x^2 + (2(a-y)-1)\cdot k^2 + xk = (2a-1)\cdot k^2 + x^2 + xk - 2y\cdot k^2 = (2a-1)\cdot k^2 + x^2 + xk - 2xk \le (2a-1)\cdot k^2$ $\square$

3. $x \le k, n - x \le k$ (а значит $k \le n \le 2k$ и $1 \le a \le 2$)

   $\min(k,x) = x$, $\min(k, n-x) = n - x$

   $T(n) \le x^2 + (n-x)^2 + x(n-x)$

   Максимум достигается или в точке $x = 0$ (на краю), или в точке, где производная равна нулю. Дифференцируем по x.

   $f(x) = x^2 + (n-x)^2 + x(n-x) = n^2 - x(n-x)$

   $f'(x) = (n^2 - x(n-x))'_x = -n + 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{2}$

   $f(\frac{n}{2}) = \frac{3}{4}n^2$

   $f(0) = n^2$

   Значит, максимум достигается в нуле. В интересующей нас области $x \le n - x \le k$ максимум достигается в точке $x_0 = n - k \le k$.

   $f(x_0) = n^2 - k(n-k) = (a\cdot k)^2 - k(a\cdot k - k) = k^2(a^2 - a + 1)$

   Докажем, что $a^2 - a + 1 \le 2a - 1$ при $a \in [1\ldots 2]$: $a^2 - 3a + 2 \le 0$, корни 1 и 2, парабола ветвями вверх. $\square$

P.S. Из выше приведенного косвенно следует худший тест для нашей динамики:

1. Если $n \ge k + 1$, делим n на поддеревья размера k и $n - k - 1$
2. Если $n \le k$, делим n на поддеревья размера 1 и $n - 2$