

Программа по алгоритмам и структурам данных

СПб АУ, 2015/16 учебный год

Первый семестр

Введение

1. O-символика, асимптотика, время работы алгоритмов. Числа Фибоначчи. Скорость роста функций: логарифм, полином, экспонента.
2. Решение рекуррентных соотношений для оценки времени работы рекурсивных алгоритмов. Алгоритм Карацубы.

Структуры данных

1. Простейшие 1: стек, дек, очередь, список, двусвязный список.
2. Простейшие 2: расширяющийся массив, хеш-таблица, пополняемые структуры данных, амортизированное время работы.
3. Расширяющийся массив и хеш-таблица с операциями за $\mathcal{O}(1)$ без амортизации.
4. Алгоритмы для аллокации памяти: стек, список.

Сортировки и кучи

1. Бинарный поиск, метод двух указателей, k-я порядковая статистика.
2. Сортировки 1: вставками, выбором, quick sort, merge sort, heap sort, bucket sort, digital sort, introsort.
3. Сортировки 2: adaptive heap sort, stable inplace sort, Kirkpatrick's sort.
4. Кучи 1: бинарная куча, k-ичная куча, leftist heap, skew heap.
5. Кучи 2: pairing heap, биномиальная куча, куча Фибоначчи, bootstrapping.
6. Нижние оценки на время сортировки, на время построения кучи.

Динамическое программирование

1. Динамическое программирование (динамика). Реализации вперёд, назад, ленивая. Динамика на языке ациклических графов. Кратчайшие и длиннейшие пути в ациклических графах.
2. Динамика: задачи о рюкзаке, наибольшей общей подпоследовательности, максимальной триангуляции.
3. Алгоритм Хиршберга для экономии памяти при восстановлении ответа в задаче о наибольшей общей подпоследовательности.
4. Битовые операции, быстрые операции с множествами.
5. Динамика по подмножествам: гамильтонов путь и цикл за $\mathcal{O}(2^n)$, задача коммивояжёра, покраска вершин графа за $\mathcal{O}(3^n)$, максимальная клика.
6. Динамика по подотрезкам, по дереву, по прямому профилю, по скошенному профилю.

Алгоритмы на графах

1. Поиск в глубину, нахождение цикла в графе, топологическая сортировка, раскраска в два цвета.
2. Компоненты сильной связности, компоненты вершинной и рёберной двусвязности, конденсация графа.
3. 2-SAT за $\mathcal{O}(V+E)$, Хорновские формулы.
4. Алгоритм Дейкстры, алгоритм A^* , алгоритм Флойда.
5. Ускорение Дейкстры до $\mathcal{O}(E + V\sqrt{C})$: radix heap, two level radix heap.
6. Алгоритм Форда-Беллмана и оптимизации, поиск цикла отрицательного веса.
7. Алгоритм Гольдберга поиска кратчайших путей за $\mathcal{O}(E\sqrt{V} \log N)$.
8. Алгоритм Йена поиска k-го кратчайшего пути.
9. Поиск цикла минимального среднего веса. Алгоритм Карпа за $\mathcal{O}(VE)$.

Минимальные остовы, жадные алгоритмы

1. СММ (система непересекающихся множеств).
2. Построение минимального остовного дерева: алгоритмы Краскала, Прима, Борувки.
3. Коды Хаффмена, сжатие текста. Реализация encode/decode за линейное время.
4. Жадные алгоритмы: выбор компаратора в сортировке.
5. Приближённые жадные алгоритмы: задача о покрытии множествами, задачи о нахождении минимального контролирующего множества, о нахождении максимального паросочетания.

Деревья поиска - 1

1. Деревья: представление в памяти, компактное хранение на диске, обходы деревьев, вывод деревьев.
2. Двоичные деревья поиска. Несбалансированное дерево: добавление, удаление, поиск, lowerbound, next/prev, связь с хеш-таблицей и двусвязным списком.
3. AVL-дерево, версия со split и merge.
4. Дерево по неявному ключу, отложенные операции, вычисление функции на отрезке.

Второй семестр

Деревья поиска - 2

1. Treap (декартово дерево). Rope. Skip-List.
2. Другие деревья поиска: RB-tree, AA-tree, k-tree, 2-3-tree, 2-3-4-tree.
3. Статически оптимальное дерево поиска. Динамически оптимальное дерево поиска. Tango tree.
4. Персистентные структуры данных: стек за $\mathcal{O}(1)$, очередь за $\mathcal{O}(1)$, массив и дерево поиска за $\mathcal{O}(\log n)$.
5. RBST (persistent treap). Ссылочный garbage collector.
6. Splay дерево.

Дерево отрезков, RMQ, LCA, LA, функции на путях дерева

1. Дерево отрезков, операции в точке и на отрезке, модификация на отрезке. Дерево Фенвика.
2. Сканирующая прямая, 2D-orthogonal-queries, сжатие координат. k -я порядковая статистика на отрезке за $\mathcal{O}(\log n)$.
3. Динамическое дерево отрезков. k -я порядковая статистика на отрезке меняющегося массива.
4. КД-дерево и 2D-orthogonal-queries за $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.
5. Многомерные аналоги дерева отрезков и дерева Фенвика. Fractional cascading.
6. RMQ: sparse table, disjoint sparse table, модификации.
7. LCA: двоичные подъёмы, разреженные двоичные подъёмы
8. Сведение $\text{RMQ} \rightarrow \text{LCA} \rightarrow \text{RMQ} \pm 1$. Построение декартова дерева за линию. Эйлеров обход дерева. Алгоритм Фараха-Колтона-Бендера.
9. LCA-Offline, RMQ-Offline
10. Функции на путях дерева: сумма и минимум в offline и online. Минимум на пути в offline за $\mathcal{O}(1)$.
11. Рандомизированный алгоритм построения MST за $\mathcal{O}(n)$.
12. Heavy-Light-Decomposition. Longest-Path-Decomposition. Функции на путях меняющегося дерева.
13. Euler-Tour-Trees
14. Задача LA в online и offline. Решение за $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(1) \rangle$.

Паросочетания и потоки

1. Максимальное паросочетание в двудольном граф. Минимальное вершинное покрытие. Максимальное независимое множество. Алгоритм Куна и оптимизации.
2. Паросочетания в произвольном графе. Алгоритм сжатия соцветий. Реализация Габова за $\mathcal{O}(V^3)$. Рандомизированная модификация Куна.
3. Лемма Холла. Теорема Дилворта. Вершинные и рёберные раскраски различных графов (обычных, двудольных, планарных).

4. Потоки. Теорема и алгоритм Форда-Фалкерсона. Декомпозиция потока. LR-поток, вершинный поток.
5. Алгоритмы поиска потока: capacity scaling, Эдмондс-Карп, Диниц, Диниц и capacity scaling. Алгоритм Хопкрофта-Карпа для поиска паросочетания.
6. Алгоритмы поиска потока минимальной стоимости: дополняющие пути, дополняющие отрицательный циклы, capacity scaling, cost scaling.
7. Preflow push алгоритмы для поиска потока. Robin round алгоритм за $\mathcal{O}(V^3)$. High level optimization, Global relabeling, алгоритм Ахьюджа.

Строки

1. Поиск подстроки в строке: КМП, Z-функция, полиномиальный хеш строки и алгоритм Рабина-Карпа, алгоритм Боуера-Мура.
2. LCP – полный предподсчёт и подсчёт LCP(i,j) хешами.
3. Палиндромы. Дерево палиндромов. Алгоритм Манакера.
4. Бор, сжатый бор, алгоритм Ахо-Корасик, динамика на боре.
5. Суффиксный массив: построение за $\mathcal{O}(n \log n)$ цифровой сортировкой, алгоритм Каркайнена-Сандерса, алгоритм Касаи построения LCP за $\mathcal{O}(n)$.
6. Суффиксный автомат. Построение за $\mathcal{O}(n)$.
7. Суффиксное дерево: построение через массив, через автомат, алгоритм Укконена. Online построение: дописываем символы с конца строки, с начала строки.

Хеширование, битовое сжатие, игры на графах

1. Антихештесты для полиномиального хеша. Универсальное семейство хеш-функций. Совершенное хеширование. Двойное хеширование. Фильтр Блюма.
2. Битовое сжатие: ускоряем в 64 раза Флойда, Гаусса, динамику для наибольшей общей подпоследовательности, динамику для задачи о рюкзаке, умножение многочленов и матриц над \mathbb{F}_2
3. Игры на ациклических графах. Динамика. Функция Гранди.
4. Игры на циклических графах. Ретро анализ. Функция Смита

Алгебра и теория чисел

1. Метод Гаусса. Выделение произвольного базиса, выделение базиса наименьшего веса, инкрементальная реализация Гаусса, координаты вектора в базисе, расстояние от точки до подпространства.
2. Длинная арифметика: сложение, вычитание, умножение/деление/извлечение корня/gcd за $\mathcal{O}(n^2)$. Оптимальный выбор системы счисления. Перевод числа из одной системы счисления в другую.
3. Быстрое преобразование Фурье. Использование для быстрого умножения, деления, извлечения корня. Версии алгоритмов для длинных чисел и для многочленов.
4. Теория чисел: решето Эратосфена, расширенный алгоритм Евклида, RSA, проверка на простоту, факторизация, эвристика Полларда, алгоритм Миллера-Рабина.