Лекция по алгоритмам #15

Тема: Карп, Йен, A*

16 декабря

Собрано 8 января 2015 г. в 02:28

---

1. Цикл минимального среднего веса

Задача: найти в взвешенном орграфе цикл минимального среднего веса.

$$w_{ave} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{k}}^{\text{ребра из цикла}} w_i}{\underbrace{k}_{\text{размер цикла}}} \to min$$

$$w_{min} \leqslant w_{ave} \leqslant w_{max}$$

Решение #1. Бинпоиск. Предикат с аргументом x проверяет, что:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} w_i}{k} < x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} w_i < \sum_{i=1}^{k} x \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (w_i - x) < 0}_{\text{цикл отрицательного веса}}$$

Изменим вес ребер с (w_i) на $(w_i - x)$ и будем искать цикл отрицательного веса алгоритмом Гольдберга. Время работы: $\mathcal{O}(\overbrace{E\sqrt{V}log_2V}^{\text{алгоритм Гольдберга}} * log_2|BS|)$ Оценим $|BS|$:
$BS.L = w_{min}$, $BS.R = w_{max} \Rightarrow |BS| = log_2(\frac{w_{max}-w_{min}}{EPS})$
Оценим EPS (веса целочисленные):

$$\underbrace{\frac{W_1}{k_1} - \frac{W_2}{k_2}}_{\neq 0} \geqslant \underbrace{\frac{1}{k_1 k_2} \geqslant \frac{1}{n^2}}_{\text{в цикле не более n ребер}} \Rightarrow EPS = \frac{1}{2n^2}$$

Таким образом:

$$|BS| = log_2[2n^2(w_{max} - w_{min})]$$

Решение #2. Карп, 78. Добавим в граф новую вершину s, с нулевыми ребрами во все остальные вершины. $d[k, v]$ - минимальный суммарный вес пути из s в v из k ребер. Вычисляем d Форд-Беллманом. Для $k = 0$: $\forall v \neq s\ d[0, v] = +\infty$
Введем новые величины ($\infty - \infty = \infty$):

$$M[v] \overset{def}{=} \max_{k=0..n-1} \frac{d[n, v] - d[k, v]}{n - k}$$

$$\mu \overset{def}{=} \min_{v \in V} M[v]$$

$$x \overset{def}{=} \text{минимальный средний вес цикла}$$

Утверждение: $x = \mu$ в графе $w_i = w_i - x - \varepsilon$
Лемма 1: $w \to w + \underbrace{C}_{\text{const}} \Rightarrow$

1) $x \to x + C$ (следует из определения)

2) $\mu \to \mu + C$ (следует из определения)

Лемма 2: Пусть докажем, что: $(x = 0 \Rightarrow \mu = 0)$, тогда: $\forall x : \mu = x$

1) Вычтем x из всех ребер.

2) По лемме 1: новый $x = 0$, по предположению новый $\mu = 0 \Rightarrow \mu = x$

3) $+x$ обратно.

Лемма 3:

a) $\forall v : M[v] \geqslant 0$
Рассмотрим $M[v]$: знаменатель положителен $\Rightarrow$ знак определяется выражением:

$$\max_{\text{k=0..n-1}}(d[n,v] - d[k,v]) = d[n,v] - \min_{\text{k=0..n-1}}(d[k,v]) = d[n,v] - d[v]$$

где $d[v]$ - кратчайший путь из s до $v \Rightarrow d[v] \leqslant d[n,v] \Rightarrow d[n,v] - d[v] \geqslant 0$

b) $\exists v : M[v] = 0$
Предполагаем, что $x = 0 \Rightarrow \exists$ 0-цикл. u - какая-то вершина на цикле. Пусть существует какой-то путь из s в u, состоящий из k ребер. Проходимся по нему и, начиная с u, будем ходить по циклу. Пройдем еще $(n-k)$ ребер, остановясь в вершине v, принадлежащей циклу. Пусть A - сумма весов ребер на пути из u в v, B - сумма весов ребер на пути из v в u далее по циклу. $\boxed{\text{A+B=0}}$
С одной стороны, очевидно, что: $d[v] \leqslant d[n,v]$
С другой стороны:

$$\underbrace{d[v] < d[n,v]}_{\text{предположение}} \leqslant \overbrace{d[u] + A}^{\text{какой-то путь до } v \text{ из } n \text{ ребер}}$$

$$\underbrace{d[u] \leqslant d[v] + B < d[u] + A + B = d[u]}_{\text{противоречие}}$$

Таким образом: $d[v] \geqslant d[n,v] \Rightarrow d[v] = d[n,v] \Rightarrow M[v] = 0$

Д-во утверждения: Пусть $x = 0$, по определению: $\mu = \min\limits_{v \in V} M[v] \overset{Lm\ 3.a}{\Rightarrow}$ если $\exists v : M[v] = 0$, то $\mu = 0 \overset{Lm\ 3.b}{\Rightarrow} \mu = 0$, откуда $\overset{Lm\ 2}{\Rightarrow} \forall x : \mu = x$

Восстановление цикла: Храним $p[k, v]$ - предок v на пути из k ребер. Пусть: $v : \mu = \min\limits_{i \in V} M[i] = M[v] \Rightarrow d[v] = d[n, v] \Rightarrow$ путь до v содержит 0-цикл $\Rightarrow$ откатываемся по предкам от $v \rightarrow$ находим цикл.

Если цикла нет: $\underbrace{d[k-1, u]}_{\text{C(k-1)}} + \underbrace{w}_{\text{C}} < \underbrace{d[k, v]}_{\text{Ck}} \Rightarrow p[k, v] = -1$

Алгоритм:

1) Форд-Беллман от S

2) Формула, считающая μ

3) Восстановление цикла по предкам