Лемма 3, билет 20

Знаем:

$q_{n,k} \leq q_{h+1,k}$, где q центр отрезка $p_{n,k}$($p_{n,k}$ — граница разделения)

Сейчас у нас есть фиксированные q и для них хотим выбрать оптимальные p.

1. Пусть у нас есть оптимальное разбиение для (n, k) p_1 и q_1 и у такого разбиение значение f_1.

2. Рассмотрим разбиение для (n + 1, k), у которого границы сохраняются и $q_2 > q_1$, где q_2 точка, для которой достигается оптимальное разбиение. Пусть у такого разбиения значение функции будет f_2

3. Рассмотрим оптимальное разбиение (n + 1, k). Там достигаются значения $q_2, p_2 < p_1$ и $f_3 < f_2$

4. Хотим доказать, что разбиение (n, k) с значениями p_2, q_1 лучше, то есть $f_4 < f_1, (f_4$ — значение функции при таком разбиение).

Доказательство:

$$f_2 = f[p_1] + Tail(p_1, q_2)$$

$$f_1 = f[p_1] + Tail(p_1, q_1)$$

$$f_3 = f[p_2] + Tail(p_2, q_2)$$

$$f_4 = f[p_2] + Tail(p_2, q_1)$$

$$0 < f_2 - f_3 = (f[p_1] - f[p_2]) - \sum_{i=p_2}^{p_1} w_i \rho(x_i, q_2)$$

$$0 < f_1 - f_4 = (f[p_1] - f[p_2]) - \sum_{i=p_2}^{p_1} w_i \rho(x_i, q_1)$$

$$\sum_{i=p_2}^{p_1} w_i \rho(x_i, q_2) > \sum_{i=p_2}^{p_1} w_i \rho(x_i, q_1)$$