

# 1. Два указателя

$x_n, w_n$  – координата и вес  $n$ -й точки ( $x_i \leq x_{i+1}, w_i \geq 0$ )

$[n, k]$  – состояние динамики, первые  $n$  точек разбили на  $k$  отрезков

$p_{n,k}$  – граница последнего отрезка

$q_{n,k}$  – центр последнего отрезка

$o_{l,r}$  – оптимальный центр отрезке  $[l, r]$

Алгоритм выбора  $o_{l,r}$  – самая левая точка, что  $\sum[l, o_{l,r}] \geq \sum(o_{l,r}, r]$ .

**Цель рассуждения** доказать, что  $p_{n,k-1} \leq p_{n,k} \leq p_{n+1,k}$

Последовательность утверждений:

**Lm #1**  $o_{l,r-1} \leq o_{l,r} \leq o_{l+1,r}$

**Lm #2**  $q_{n+1,k} \geq q_{n,k}$ . Доказательство: перейдем от оптимального  $(n, k)$  разбиения к  $(n+1, k)$  разбиению, не поменяв положение центра последнего отрезка  $q_{n,k}$ , функция увеличилась на  $\mathcal{X} = w_n(x_n - x_{q_{n,k}})$ . Теперь перейдем к оптимальному  $(n+1, k)$  разбиению, функция уменьшилась. Теперь перейдем к  $(n, k)$  разбиению, функция уменьшилась на  $\mathcal{Y} = w_n(x_n - x_{q_{n+1,k}})$ . Если  $q_{n+1,k} < q_{n,k}$ , то  $\mathcal{Y} > \mathcal{X}$ , и, мы получаем противоречие с предположением, что исходное разбиение  $(n, k)$  было оптимальным.

**Lm #3**  $p_{n+1,k} \geq p_{n,k}$

Следует из Lm #2 и Lm #1.

**Lm #4**  $p_{n,k} \geq p_{n,k-1}$

Пусть  $k = 3$  и  $p_{n,k} < p_{n,k-1}$ . Смотрим на правые два отрезка в обоих разбиениях, видим противоречие с Lm #3. Теперь пусть  $k$  – произвольное и  $p_{n,k} < p_{n,k-1}$ . Смотрим на правые два отрезка в обоих разбиениях, или видим противоречие с Lm #3, или смотрим на правые три отрезка, для которых также, или противоречие, или нужно взять +1 отрезок.