Первый курс, осенний семестр
Практика по алгоритмам #1

Асимптотика и рекуррентные соотношения

7 сентября

Собрано 9 сентября 2015 г. в 11:32

Содержание

1. Новые задачи

1. **Простые задачи на асимптотику.**
   Найдите короткую запись через Θ.
   Если такой не существует, объяснить, почему, и записать через O.
   1. $2n$
   2. $2n+1$
   3. n^2+5n+1
   4. $\frac{n^2+3}{7n+1}$
   5. $n(2+\sin n)$
   6. $\frac{\operatorname{arctg} n}{n}+\frac{\log\log n}{\log n}$
   7. Докажите: $\forall f, g > 0\colon f+g=\Theta(\max(f,g))$
   8. $\frac{P(n)}{Q(n)}, deg\, p > deg\, q > 0$
2. **Истина или ложь?**
   Проверьте корректность, докажите.
   1. $2^{n+3}=\Theta(2^n)$
   2. $2^{2n+1}=\Theta(2^n)$
   3. $g(n)=\mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)}=\mathcal{O}(2^{f(n)})$
   4. $g(n)=o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)}=o(2^{f(n)})$
   5. $g(n)=\mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n)=\mathcal{O}(\log f(n))$
   6. $g(n)=o(f(n)) \Rightarrow \log g(n)=o(\log f(n))$
   7. $f(n)+g(n)=\Theta(\frac{f(n)+g(n)}{2})$
   8. $n^2=\mathcal{O}(2^n)$
   9. $\frac{n}{\log n}=\omega(\log n)$ (А если Ω?)
   10. $\frac{n}{\log n}=\Theta(0.5\cdot n)$
3. **Рекуррентность**
   1. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+1$
   2. $T(n)=3T(\frac{n}{2})+n^2$
   3. $T(n)=5T(\frac{n}{2})+n$
   4. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\log n$
   5. $T(n)=3T(\frac{n}{3})+n$
   6. $T(n)=T(n-1)+T(n-1)+1$
4. **Дополнительные задачи**
   1. Найдите короткую запись через Θ.
      Если такой не существует, объяснить, почему, и записать через O.
      $f(n)=n(1+\sin n)$
   2. $T(n)=T(\frac{n}{2})+1$
   3. $T(n)=T(\frac{n}{2})+n$
   4. $T(n)=T(\frac{n}{\log n})+\log n$
   5. $T(n)=T(\frac{n}{2})+T(\frac{n}{3})+1$

2. Разбор задач практики

1. **Простые задачи на асимптотику.**
   Найдите запись через Θ. Если не существует, объяснить, почему, и записать через $\mathcal{O}$.
   1. $2n = \Theta(n)$, по определению =)
   2. $f(n) = 2n + 1$,
      $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leqslant 2n + 1 \leqslant 2n + n \leqslant 3n \Rightarrow f(n) = \Theta(n)$.
   3. $f(n) = n^2 + 5n + 1$,
      $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 \leqslant f(n) \leqslant n^2 + 5n^2 + n^2 = 7n^2 \Rightarrow f(n) = \Theta(n^2)$.
      Способ #2: $5n + 1 = \mathcal{O}(n^2) \Rightarrow 5n + 1 = \alpha n^2 \Rightarrow f(n) \leqslant (1 + \alpha)n^2 \Rightarrow f(n) = \Theta(n^2)$.
   4. $f(n) = \dfrac{n^2 + 3}{7n + 1}$,
      Поделим числитель на знаменатель: $f(n) = (\frac{1}{7}n - \frac{1}{49}) + \underbrace{\dfrac{3 - \frac{1}{49}}{7n + 1}}_{\text{беск. малая}} \Rightarrow f(n) = \Theta(n)$.
      Способ #2: $\dfrac{n^2}{7n + n} \leqslant f(n) \leqslant \dfrac{n^2 + n^2}{7n} \Rightarrow \frac{1}{8}n \leqslant f(n) \leqslant \frac{2}{7}n$.
   5. $f(n) = n(2 + \sin n)$,
      $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 2 + \sin n \leqslant 3 \Rightarrow n \leqslant f(n) \leqslant 3n \Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(n)$.
   6. $f(n) = \frac{\operatorname{arctg} n}{n} + \frac{\log\log n}{\log n}$,
      Пусть $g(n) = \dfrac{\log\log n}{\log n}$.
      $\arctan n < \frac{\pi}{2} < \log\log n,\ n > \log n \Rightarrow f(n) \leqslant 2g(n) = \Theta(g(n))$.
   7. Докажите: $\forall f, g > 0\colon f + g = \Theta(\max(f, g))$,
      $\forall n \in \mathbb{N} \quad \max(f(n), g(n)) \leqslant f(n) + g(n) \leqslant 2\max(f(n), g(n))$.

2. **Истина или ложь?**
   Проверьте корректность, докажите.
   1. $2^{n+3} = \Theta(2^n)$,
      Верно: $2^{n+3} = 8 \cdot 2^n = \Theta(2^n)$.
   2. $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$,
      Неверно, что $2^{2n+1} = \mathcal{O}(2^n)$, докажем от противного.
      Предположим, что $\forall n \geqslant N \quad 2^{2n+1} \leqslant c \cdot 2^n \Rightarrow 2^{n+1} \leqslant c \Rightarrow n \leqslant \log c - 1$. Противоречие.
   3. $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = \mathcal{O}(2^{f(n)})$,
      Неверно, возьмём $f(n) = 2n + 1,\ g(n) = n$. Получим условие предыдущей задачи.
   4. $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = o(2^{f(n)})$,
      Верно, если $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
      $g(n) = o(f(n)) \Leftrightarrow \frac{g(n)}{f(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
      $\dfrac{2^{g(n)}}{2^{f(n)}} = 2^{g(n)-f(n)}$, но $f(n) - g(n) = f(n) - f(n) \cdot \frac{g(n)}{f(n)} = f(n)\left(1 - \frac{g(n)}{f(n)}\right) \geqslant 0.5f(n)$.
      $2^{g(n)-f(n)} \leqslant \dfrac{1}{2^{0.5f(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Способ #2: $2^{g(n)} < c \cdot 2^{f(n)} \Leftrightarrow g(n) < \log c + f(n)$ $(*)$, но $\forall c_1 > 0 \quad g(n) < c_1 \cdot f(n)$, значит $(*) \Leftarrow c_1 \cdot f(n) < \log c + f(n) \Leftrightarrow (1-c_1)f(n) > -\log c \overset{c_1<1}{\Longleftrightarrow} f(n) > \dfrac{-\log c}{1-c_1}$.

Возьмём $c_1 = \frac{1}{2}$, тогда $\exists N \quad \forall n \geqslant N \quad f(n) > -2\log c \Rightarrow 2^{g(n)} < c \cdot 2^{f(n)}$.

Таким образом, $\forall c > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad 2^{g(n)} < c \cdot 2^{f(n)}$.

5. $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = \mathcal{O}(\log f(n))$,
   Верно, если $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

   $\log g(n) < c \cdot \log f(n) \Leftrightarrow g(n) < (f(n))^c$.

   $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Leftrightarrow \exists c_1 > 0 \quad g(n) < c_1 f(n)$, таким образом

   $g(n) < (f(n))^c \Leftarrow c_1 f(n) < (f(n))^c \Leftrightarrow (f(n))^{c-1} > c_1$ — верно, если $f(n) \to +\infty$ и $c > 1$.
6. $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = o(\log f(n))$,
   Неверно, при $f(n) \to +\infty$.

   $\log g(n) < c \log f(n) \Leftrightarrow g(n) < (f(n))^c$.

   $g(n) = o(f(n)) \Leftrightarrow \forall c_1 > 0 \quad g(n) < c_1 f(n)$, таким образом

   $g(n) < (f(n))^c \Leftarrow c_1 f(n) < (f(n))^c \Leftrightarrow (f(n))^{c-1} > c_1 \Leftrightarrow (c-1)\log f(n) > \log c_1$.

   Это неверно, если $f(n) \to +\infty$ и $c < 1$, так как
   $\log f(n)$ не может быть ограничен сверху числом $\dfrac{\log c_1}{c-1}$.
7. $f(n) + g(n) = \Theta(\frac{f(n)+g(n)}{2})$, верно по определению.
8. $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$,
   Верно, так как $\dfrac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow n^2 = o(2^n) \Rightarrow n^2 = \mathcal{O}(2^n)$.
9. $\log n = o(\frac{n}{\log n})$,
   Верно: $\log n = o(\frac{n}{\log n}) \Leftrightarrow \log n < c \cdot \dfrac{n}{\log n} \Leftrightarrow \log^2 n = n \Leftrightarrow \log^2 n = o(n)$.

   Сделаем замену переменной $n = 2^y$, получим $y^2 = o(2^y)$, верное по предыдущему пункту.
10. $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n)$,
    Неверно: $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n) \Leftrightarrow n = \Theta(n \log n) \Rightarrow n \log n = \mathcal{O}(n)$.

    Если $n \log n < c \cdot n$, то $\log n < c$, что неверно, в силу неограниченности $\log n$.

3. **Реккурентность**
   1. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$,
      $2^k = n \Leftrightarrow k = \log n$

      $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 = 2(2T(\frac{n}{4}) + 1) + 1 = \underbrace{2(2(2(\ldots(2}_{\text{k двоек}}T(\frac{n}{2^k}) + \underbrace{1)\ldots) + 1) + 1) + 1}_{\text{k единиц}}$.

      Раскроем скобки: $2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2^1 + 1 = 2^{k+1} - 1 = 2n - 1 = \Theta(n)$.

      Способ #2 (по теореме): $a = 2, b = 2, c = 0, f(n) = 1 = \Theta(n^c), c < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$.
   2. $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$,
      $2^k = n \Leftrightarrow k = \log n$

      $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2 = 3(3T(\frac{n}{2^2}) + (\frac{n}{2^1})^2) + (\frac{n}{2^0})^2 =$

$= \underbrace{3(3(3(\dots(3}_{\text{k троек}} T(\frac{n}{2^k}) + \underbrace{(\frac{n}{2^{k-1}})^2)\dots) + (\frac{n}{2^2})^2) + (\frac{n}{2^1})^2) + (\frac{n}{2^0})^2}_{\text{k штук}} =$
$= 3^k + 3^{k-1}(\frac{n}{2^{k-1}})^2 + 3^{k-2}(\frac{n}{2^{k-2}})^2 + \dots + 3(\frac{n}{2^1})^2 + 1 \cdot (\frac{n}{2^0})^2 =$
$= n^2((\frac{3}{4})^k + (\frac{3}{4})^{k-1} + (\frac{3}{4})^{k-2} + \dots + \frac{3}{4} + 1) \leqslant n^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^k = n^2 \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4n^2 \Rightarrow$
$n^2 \leqslant T(n) \leqslant 4n^2 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2).$

Способ #2 (по теореме):
$a = 3, b = 2, c = 2, f(n) = \Omega(n^2), c > \log_b a, 3(\frac{n}{2})^2 \leqslant \frac{3}{8}n^2 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2).$

3. $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n,$
$2^k = n \Leftrightarrow k = \log n$

$T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n = 5(5T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2^1}) + \frac{n}{2^0} =$
$= \underbrace{5(5(5(\dots(5}_{\text{k штук}} T(\frac{n}{2^k}) + \underbrace{\frac{n}{2^{k-1}})\dots) + \frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2^1}) + \frac{n}{2^0}}_{\text{k штук}} =$
$= 5^k + 5^{k-1}\frac{n}{2^{k-1}} + 5^{k-2}\frac{n}{2^{k-2}} + \dots + 5\frac{n}{2^1} + 1 \cdot \frac{n}{2^0} =$
$= n((\frac{5}{2})^k + (\frac{5}{2})^{k-1} + (\frac{5}{2})^{k-2} + \dots + \frac{5}{2} + 1) = n \sum\limits_{i=0}^{k} 2.5^i = n \dfrac{2.5^{k+1} - 1}{2.5 - 1} = \Theta(n \cdot 2.5^k).$

$2.5^k = 2.5^{\log n} = 2^{\log(2.5^{\log n})} = 2^{\log n \cdot \log 2.5} = n^{\log 2.5} \Rightarrow$
$T(n) = \Theta(n^{1 + \log 2.5}) = \Theta(n^{\log 2 + \log 2.5}) = \Theta(n^{\log 5}).$

Способ #2 (по теореме):
$a = 5, b = 2, c = 1, f(n) = \mathcal{O}(n^1), c < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 5}).$

4. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n,$
$a = 2, b = 2, f(n) = \Theta(n^1 \log^1 n), c = \log_b a = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log^{1+1} n) = \Theta(n \log^2 n).$

5. $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n,$
$a = 3, b = 3, f(n) = \Theta(n^1 \log^0 n), c = \log_b a = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log^{0+1} n) = \Theta(n \log n).$

6. $T(n) = T(n-1) + T(n-1) + 1,$
$T(n) = 2T(n-1) + 1 = 2(2T(n-2) + 1) + 1 = 2(2\dots(2T(1) + 1) + \dots + 1) + 1 =$
$= 2^{n-1} + \dots + 2^1 + 1 = 2^n - 1 = \Theta(2^n).$

Можно доказать это и по индукции, посмотрев на первые несколько членов.

3. История про синус

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0, y \in [-1..1] \quad \exists n \in \mathbb{N} \colon |y - \sin n| < \varepsilon.$

π иррационально $\Rightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \colon (i \mod 2\pi) \neq (j \mod 2\pi)$. Рассмотрим первые n натуральных чисел, им соответствуют разные остатки по модулю 2π, то есть, разные точки на единичной окружности. Есть две точки i и j на расстоянии не больше $\varepsilon = \frac{2\pi}{n}$. $0 < (|j-i| \mod 2\pi) \leqslant \varepsilon$. Теперь мы можем ходить с шагом $|j-i|$ и попасть в окрестность любой точки на окружности:

Чтобы попасть в точку x достаточно взять $k = \lfloor \frac{x}{|j-i|} \rfloor$ и точку $k \cdot |j-i|$.

Пусть $x = \arcsin y \Rightarrow |y - \sin(k|j-i|)| < \varepsilon.$

4. Домашнее задание

1. Обязательная часть

1. **Истина или ложь?**
   Проверьте корректность, докажите.
   (0.5) за каждый пункт.
   11. $n^{logn} = \mathcal{O}(1.1^n)$
   12. $\frac{n^3}{n^2+n\log n} = \mathcal{O}(n \log n)$
   13. $f(n) = \mathcal{O}(f(\frac{n}{2}))$
   14. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$
   15. $\log n! = \Theta(n \log n)$

2. **Рекуррентность.**
   Во всех задачах предполагается, что $\forall x \leqslant 1, T(x) = 1$
   (0.5) за каждый пункт.
   7. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n$
   8. $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n\log^2 n$
   9. $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + 1$
   10. $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$
   11. $T(n) = T(n-1) + n$

3. **(3) Заполнить табличку.**
   $A = O(B)$? $A = o(B)$? и т.д. За каждый неправильный ответ -0.1 балл.

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\lg^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$					
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

4. **(6) Упорядочить функции в порядке возрастания.**
   Если какие-то функции равны ($f = \Theta(g)$), указать это. Здесь $\lg n$ — двоичный логарифм, $\ln n$ — натуральный логарифм. За каждый неправильный ответ -0.1 балл.

$\lg(\lg^* n)$	$2^{lg^* n}$	$(\sqrt{n})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg n!$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^* \lg n$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

Примечание: $\lg^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \leq 1; \\ 1 + \lg^*(\lg n) & \text{иначе} \end{cases}$

5. **Посчитать точно.**
   (0.5) за каждый пункт
   1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$
   2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

2. Дополнительная часть

1. **Истина или ложь?**
   Проверьте корректность, докажите.
   (0.5) за каждый пункт.

   16. $n^n = \mathcal{O}(n!)$
   17. $n \log n - \log n! = \Theta(n)$

2. **Рекуррентность.**
   Во всех задачах предполагается, что $\forall x \leqslant 1, T(x) = 1$
   (0.5) за каждый пункт.

   12. $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$
   13. $T(n) = T(n-1) + T(n-3)$
   14. $T(n) = T(\frac{n}{2}) \cdot T(\frac{n}{3})$