Домино

С. Берлов, К. Кохась

Версия 0.07

Условия задач

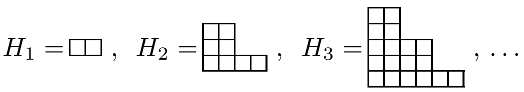
1 *Четность*

1.1. Докажите, что квадрат $n \times n$ разбивается на доминошки четным числом способов.

1.2. Докажите, что квадрат $n \times n$ разбивается на доминошки кратным 4 числом способов при $n > 2$.

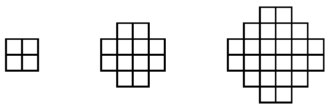
1.3. Докажите, что прямоугольники $3 \times 2n$ и $7 \times 2n$ разбиваются на доминошки нечетным числом способов.

1.4. Рассмотрим последовательность клетчатых фигур

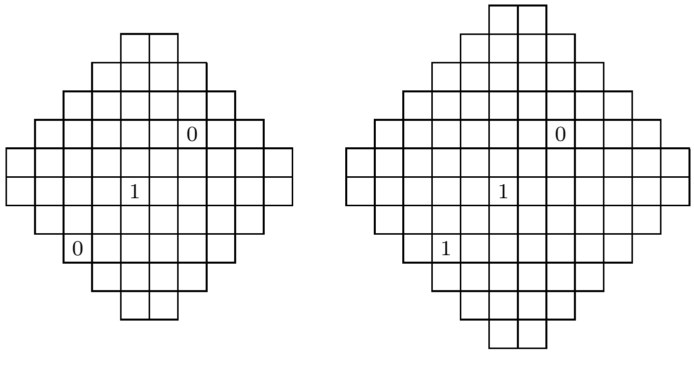


Фигура H_n получается из H_{n-1} добавлением слева вертикального прямоугольника $2 \times (2n-1)$. Докажите, что все фигуры H_n разбиваются на домино нечетным числом способов.

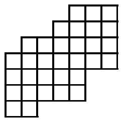
Ацтекский диамант ранга n — это "клетчатый ромбик" со стороной n. На рисунке изображены ацтекские диаманты ранга 1, 2 и 3.



1.5. Рассмотрим "среднюю линию" ацтекского диаманта, т. е. диагональный ряд клеток, идущий от середины его "стороны" к середине противоположной "стороны". Отметим на этой линии клетки через одну и поместим в отмеченные клетки произвольным образом числа 0 и 1 (на рисунке показан пример для диамантов четного и нечетного рангов). Рассмотрим разбиения диаманта на доминошки, согласованные со сделанной разметкой следующим образом: в них для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой, вторая клетка доминошки расположена левее или выше, если эта цифра — 0 и правее или ниже — если 1. Докажите, что для всех расстановок нулей и единиц количество согласованных разбиений на доминошки одно и то же. В частности, количество разбиений ацтекского диаманта ранга n на доминошки делится на $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.



1.6. а) Докажите, что изображенная ниже фигура четным числом способов разбивается на доминошки.



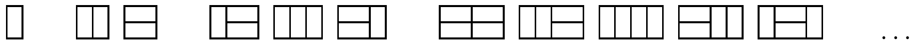
б) Докажите, что количество разбиений на доминошки ацтекского диаманта ранга n делится на 2^n.

1.7. Докажите, что прямоугольник $n \times (n+1)$ разбивается на доминошки нечетным числом способов.

2 *Рекуррентные соотношения*

Обозначим через $N(n,m)$ количество разбиений на домино прямоугольника $n \times m$, а через f_n — последовательность чисел Фибоначчи: $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

2.1. Докажите, что последовательность $N(n,2)$ — это последовательность чисел Фибоначчи.



1 2 3 5

2.2. Докажите при помощи комбинаторного рассуждения, что $f_{n+m} = f_n f_{m-1} + f_n f_m$.

2.3. Докажите, что последовательность $N(n,3)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$N(n,3) = 4N(n-2,3) - N(n-4,3)\,.$$

2.4. На краю доски 1993×1993 отмечено два поля A и B, разделенные нечетным числом полей. Докажите, что количество способов покрыть доминошками 1×2 всю доску без поля A равно количеству способов покрытия доминошками доски без поля B.

2.5. Пусть d — количество способов разбить прямоугольник 100×200 на доминошки, d_2 — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник, но без двух угловых клеток, прилегающих к одной стороне, d_4 — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник без четырех угловых клеток. Докажите, что

$$d \cdot d_4 = 2d_2^2\,.$$

2.6. Рассмотрим числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & c & & e & & g & & \dots \\ & b & & d & & f & & \dots & \\ & & h & & k & & \dots & & \\ & & & \ell & & \dots & & & \\ & & & & \dots & & & & \end{array} \tag{1}$$

образованный по правилу: для любых четырех чисел, образующих “ромбик”, выполнено соотношение

$$\begin{array}{ccc} & w & \\ x & & y \\ & z & \end{array} \qquad wz = xy + 1\,. \tag{2}$$

Пусть первая строка этого треугольника состоит из единиц, а вторая — из двоек. Найдите, что за числа стоят в этом треугольнике.

Белая магия. Рассмотрим треугольник из предыдущей задачи. Будем считать, что элементы первых двух строчек — это независимые переменные, а элементы всех остальных строк — это рациональные функции от них, заданные при помощи соотношения (2). Нетрудно подсчитать, что элемент ℓ в треугольнике (1) имеет вид

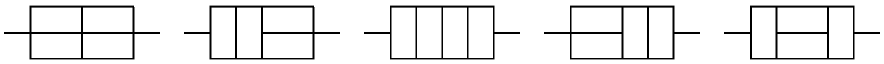
$$\ell = \frac{hk+1}{d} = \frac{\frac{bd+1}{c} \cdot \frac{df+1}{e} + 1}{d} = bc^{-1}de^{-1}f + c^{-1}e^{-1}f + c^{-1}d^{-1}e^{-1} + bc^{-1}e^{-1} + d^{-1}\,. \tag{3}$$

Теперь выпишем все разбиения прямоугольника 2×4 на доминошки и проделаем следующие действия:

1) добавим к каждой короткой стороне прямоугольника горизонтальный отрезок;

2) для каждого узла клетчатой бумаги, находящегося на средней линии прямоугольника, напишем его редуцированную валентность: количество единичных отрезков разбиения, сходящихся в этом узле, минус 3;

3) возьмем полученные упорядоченные наборы из 5 чисел в качестве показателей степеней у переменных b, c, d, e, f в произведении $b^*c^*d^*e^*f^*$.



1 −1 1 −1 1	0 −1 0 −1 1	0 −1 −1 −1 0	1 −1 0 −1 0	0 0 −1 0 0	...
$bc^{-1}de^{-1}f$	$c^{-1}e^{-1}f$	$c^{-1}d^{-1}e^{-1}$	$bc^{-1}e^{-1}$	d^{-1}	

Сравните то, что получилось, с правой частью (3).

2.7. Докажите, что "Белая магия" — это общий факт, а именно:

1) рациональные функции из треугольника (1) суть суммы одночленов, каждый из которых — это произведение исходных переменных в степени ± 1 или 0. Все коэффициенты в сумме равны 1.

2) Одночлены, составляющие функцию из $(n+2)$-й строки, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями прямоугольника $2 \times 2n$ на доминошки по описанному выше правилу.

3 *Разное*

3.1. Верно ли, что для любого натурального n существует клетчатая фигура, которую можно разбить на доминошки ровно n способами?

3.2. Докажите, что если клетчатый многоугольник без дыр можно разбить на доминошки, то у него есть хотя бы одна четная сторона.

3.3. Докажите, что $(5/4)^{mn} < N(m,n) < (10/7)^{mn}$.

3.4. Докажите, что количество разбиений прямоугольника $3 \times 2n$ на доминошки — это число вида $a^2 + 2b^2$.

3.5. Прямоугольник $2n \times 2m$ разбит на доминошки. Вне доски возле крайней левой вертикали прямоугольника находится фишка, которая начинает двигаться по доске вправо по следующему правилу. Заходя в очередную доминошку (слева), фишка перемещается на вторую клетку этой доминошки и движется с этой клетки вправо на следующую доминошку (или за край доски). Докажите, что фишка закончит движение справа от доски на той же горизонтали, на которой она находилась в начале.