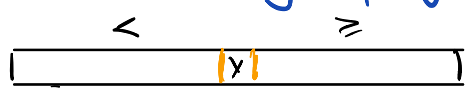
Разделяй и властвуй

Поиск в упорядоченном массиве



Ищем x $\equiv$ Двоичный поиск

Метод:

1. Разбиваете на подзадачи
2. Решаете подзадачи рекурсивно
3. Восстанавливаете ответ для исходной задачи на основе ответов для подзадач.

$T(n)$ – время решения на массиве длины n

$$\begin{cases} T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

рекуррентное соотнош.

$$T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 = T\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil\right) + 2 = \ldots = T\left(\left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil\right) + k$$

$$\leq \lceil \log_2 n \rceil = O(\log n)$$

Умножение n-битных чисел

Word-RAM машина умеет умножать $O(\log n)$-битные числа за $O(1)$

Сложение в столбик за $O(n)$

Умножение в столбик за $O(n^2)$

„Трюк Гаусса"

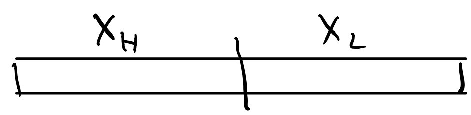
$$(a+bi)(c+di) = \underbrace{ac}_{1} - \underbrace{bd}_{2} + i(ad+bc)$$

$$(a+b)\underset{3}{\cdot}(c+d) = ac + bd + ad + bc$$

$$ad+bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

Пусть X и Y − n-битные числа

$$X = X_H \cdot 2^{n/2} + X_L$$



$$Y = Y_H \cdot 2^{n/2} + Y_L$$

$$12|34 = 12 \cdot 10^2 + 34$$

$$X \cdot Y = (X_H \cdot 2^{n/2} + X_L)\cdot(Y_H \cdot 2^{n/2} + Y_L)$$

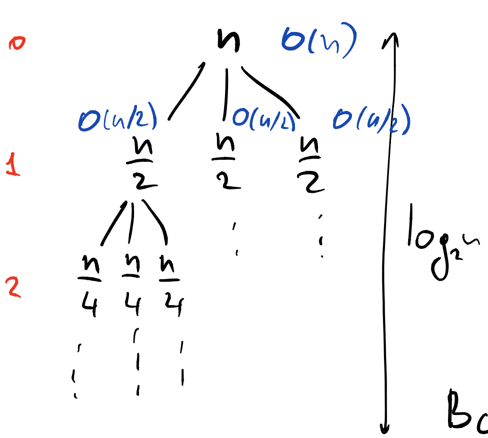
$$= \underbrace{X_H \cdot Y_H}_{1} \cdot 2^n + \underbrace{X_L \cdot Y_L}_{2} + 2^{n/2}(X_H \cdot Y_L + X_L \cdot Y_H)$$

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + O(n)$$

$$\underbrace{(X_H + X_L)(Y_H + Y_L)}_{3} = X_H \cdot Y_H + X_L \cdot Y_L + \boxed{X_H Y_L + X_L \cdot Y_H}$$

$$\begin{cases} T(n) = 3T(n/2) + O(n) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

Алгоритм Карацубы



На уровне k всего 3^k вершин

В каждой вершине задача размера $n/2^k$

На уровне k: $O(n/2^k) \cdot 3^k$

Всего: $T(n) = \sum_{k=0}^{\log_2 n} O(n/2^k) \cdot 3^k =$

$$= O(n) \cdot \sum_{k=0}^{\log_2 n} O(3^k/2^k) = O\left(n \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\log_2 n}\right) =$$

$$= O\left(\cancel{n} \cdot \frac{3^{\log_2 n}}{\cancel{2^{\log_2 n}}_{\,n}}\right) = O\left(3^{\log_2 n}\right) = O\left(n^{\log_2 3}\right) = O\left(n^{1.59}\right)$$

Основная теорема о рекуррентных соотношениях (Master theorem)

$$T(n) = a \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + O(n^d)$$

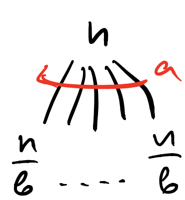
$a, b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, $d \geq 0$

1. $a > b^d$, $\log_b a > d$ $\qquad T(n) = O(n^{\log_b a})$

2. $a < b^d$, $\log_b a < d$ $\qquad T(n) = O(n^d)$

3. $a = b^d$, $\log_b a = d$ $\qquad T(n) = O(n^d \cdot \log n)$

▷



∢ k-ый уровень рекурсии.

a^k вершин (подзадач) размера $\frac{n}{b^k}$

операций на уровне k: $a^k \cdot O\left(\left(\frac{n}{b^k}\right)^d\right)$

$$\text{Всего: } T(n) = \sum_{k=0}^{\log_b n} a^k \cdot O\left(\left(n/b^k\right)^d\right) =$$

$$= O(n^d) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k}_{\text{сумма геом. прогрессии}} = (*)$$

1. $\frac{a}{b^d} > 1 \iff a > b^d$

$$(*) = O(n^d) \cdot O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\cancel{n^d} \cdot a^{\log_b n}}{\underbrace{\cancel{\left(b^{\log_b n}\right)^d}}_{\cancel{n^d}}}\right) = O\left(a^{\log_b n}\right) = O\left(n^{\log_b a}\right)$$

2. $\frac{a}{b^d} < 1 \iff a < b^d$

$$(*) = O(n^d) \cdot O(1) = O(n^d)$$

3. $\frac{a}{b^d} = 1 \iff a = b^d$

$$(*) = O(n^d) \cdot O(\log_b n) = O(n^d \cdot \log n)$$

$\triangleleft$