

Вопросы к экзамену по доп главам алгоритмов

SPb HSE, ВШЭ 3-й курс, 25 июня 2025

Общая информация

- Конспект: [\[pdf\]](#)
- Экзамен устный. ≈ 120 минут на ответ.
Экзамен проходит *без* использования конспекта и других источников.
- В каждой теме есть теорминимум, который обязательно нужно знать. Кроме того экзаменуемый самостоятельно выбирает 40% вопросов, и готовит их к сдаче. На экзамене нужно поставить плюсики напротив вопросов, которые вы готовы отвечать. 9 вопросов – обязательная база; 9 вопросов – дополнение; из оставшихся 94 вопросов нужно $40\% = 38$ вопросов. Итого вам готовить $47 = 9 + 38$ вопросов.
- Если не знать теорминимум, не зачёт. Оценка линейна от 0/10 до 9/10 ($0 \rightarrow 0$, $47 \rightarrow 9$).
Чтобы получить 10 нужно +5 любых дополнительных вопросов.
- (*) – теорминимум.
- (a) – алгоритмы.
- (b) – доказательства.
- (c) – особо сложные темы.
- (+) – факультативные темы для тех, кому хочется.

Многочлены, FFT и применения

- (*) 1. Что такое FFT? За сколько работает? Опишите любую рабочую версию прямого FFT. Как с помощью FFT посчитать число счастливых билетов?
- (a) 2. Умножение многочленов не в $\mathbb{C}$.
- (a) 3. Базовые действия над F_2 : умножение за $\mathcal{O}(\frac{nm}{w})$, деление за $\mathcal{O}(\frac{(n-m)m}{w})$, gcd за $\mathcal{O}(\frac{nm}{w})$.
- (a) 4. Быстрое умножение над F_2 : $\mathcal{O}(nm/w^{1.58})$. Быстрое умножение над кольцом.
- (a) 5. Рекурсивное прямое FFT, обратное FFT, нерекурсивное FFT, предподсчёт корней.
- (b) 6. Обратное FFT. Точность вычислений. FFT по модулю. FFT над $\mathbb{Z}$.
- (a) 7. Разделяй и властвуй: смена системы счисления; деление; значения в точках; интерполяция.
- (a) 8. Обращение ряда и деление многочленов за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- (a) 9. Метод Ньютона. Деление чисел за $\mathcal{O}(n \log n)$, извлечение корня за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- (a) 10. Задачи: 3-SUM; $n!$ за $\mathcal{O}^*(\sqrt{n})$; факторизация за $\mathcal{O}^*(n^{1/4})$.
- (a) 11. Задачи: FFT(x, y); покраска в k цветов; рюкзак «набрать S ровно k предметами» за $\mathcal{O}^*(nS)$.
- (*) 12. Операции с рядами за $\mathcal{O}(n \log n)$: $A(x) \rightarrow \log(A(x))$, A'_x , $\int A dx$.
- (a) 13. Операции с рядами за $\mathcal{O}(n \log n)$: $\exp(A(x))$.
- (a) 14. Рюкзак за $\mathcal{O}^*(S + n)$.
- (a) 15. CRC-32, вычисление за $2n$ битовых операций.
Кодирование с ошибками: проверка одной ошибки; исправление одной ошибки.
- (b) 16. Какие бывают конечные поля? Как получить поле $F_{2^{32}}$?
- (a) 17. Коды Рида-Соломона (кодирование для исправления k ошибок). Кодирование. Проверка наличия ошибок. Декодирование при отсутствии ошибок, при наличии ошибок. Время работы.
- (b) 18. Критерий корректности кода через расстояние Хэмминга. Корректность кодирования. Корректность декодирования. Почему СЛАУ имеет единственное решение?
- (a) 19. Линейная рекуррента за $\mathcal{O}(k^3 \log n)$ и $\mathcal{O}(k \log k \log n)$.
- (a) 20. Берлекемп-Мессис для линейной рекурренты за $\mathcal{O}(nk)$.
- (a) 21. Берлекемп-Мессис и замощение доминошками за $\mathcal{O}^*((2^h)^2)$.

- (a) 22. Алгоритм Бостона-Мори.
- (c) 23. Композиция рядов за $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.
- (c) 24. Обратная функция к ряду за $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.

Автоматы и суффиксные автоматы

- (*) 25. Что такое детерминированный (DA) и недетерминированный (NDA) автоматы? Что такое суффиксный автомат? Правый контекст? Суффиксная ссылка? Какие конечные состояния у суффаавтомата? Как с помощью суффаавтомата искать строку s в тексте t за $\mathcal{O}(s)$?
- (a) 26. Принятие строки DA за $\mathcal{O}(s)$ и NDA за $\mathcal{O}(m \cdot |s|)$, детерминизация автомата.
- (a) 27. Проверка эквивалентности двух автоматов за $\mathcal{O}(m^2)$.
- (a) 28. Минимизация Хопкрофтом за $\mathcal{O}(nk \log n)$.
- (a) 29. Изоморфность автоматов за $\mathcal{O}(m)$, эквивалентность минимальному за $\mathcal{O}(m)$, минимизация недетерминированного: алгоритм Бржозовского.
- (b) 30. Минимизация: правые контексты, разбиение вершин на классы эквивалентности, рёбра, корректность определения, определение суффиксного автомата, суффссылок, терминальные вершины суффаавтомата. Леммы, связанные с правыми контекстами.
- (a) 31. Алгоритм построения суффиксного автомата за линейное время.
- (b) 32. Корректность алгоритма (почему раздвоится только одна вершина, и мы именно её находим).
- (b) 33. Оценка $\mathcal{O}(n)$ на время построения.
- (a) 34. *Задачи*: суффдерево по суффаавтомату, LCP суфффиксов за $\mathcal{O}(1)$ в суффаавтомате.
- (b) 35. Размер: оценки $2n$ вершин, $3n$ рёбер. Обоснование идеи «суффдерево по суффаавтомату».
- (a) 36. *Задачи*: LZSS за $\mathcal{O}(n)$; общая подстрока k строк с допамятью $\mathcal{O}(\min |s_i|)$; refrain.

Линейное программирование и симплекс метод

- (*) 37. Сформулируйте задачи LP и ILP. Запишите задачу mincost-k-flow в форме LP. Определите двойственную задачу, сформулируйте теорему сильной двойственности. Что такое полиэдр? Сформулируйте кратко симплекс-метод на языке «вершины и рёбра полиэдра».
- (b) 38. LP и ILP задачи: кратчайшее расстояния, flow, multicommodity-flow, два непересекающихся пути, mincost-max-matching (двудольный граф, произвольный граф), mincost-vertex-cover.
- (b) 39. Полиэдр. Выпуклость. Почему оптимум в вершине? Почему ненулевых x_i мало? Алгоритм за $\mathcal{O}(2^{n+m}n^3)$ перебором базисных планов. Корректность.
- (a) 40. Симплекс метод, если уже дано начальное решение. Корректность Симплекс метода.
- (a) 41. Поиск начального решения для Симплекс метода. Корректность.
- (a) 42. Решение задачи LP для малых размерностей $d = 2$ за $\mathcal{O}(n)$ и $\forall d$ за $\mathcal{O}(n \cdot d!)$.
- (a) 43. Решение задачи LP для малых размерностей d за $\mathcal{O}(n \cdot d^2)$.
- (a) 44. Обучение Перцептрона. Оценка времени работы.
- (b) 45. Слабая теорема двойственности. Доказательство.
- (b) 46. Сильная теорема двойственности. Доказательство.
- (b) 47. TUM. Определение. TUM матрицы инцидентности двудольного. Проблемы с недвудольным. Теорема: TUM $\Rightarrow$ Симплекс даст целочисленное решение.
- (a) 48. Метод Эллипсоидов. Постановка задачи. Алгоритм. Время работы без обоснования.
- (b) 49. Матричные игры. Вероятностная стратегия. Нэш: существование равновесия вероятностных стратегий для симметричных игр для двух игроков. Поиск вероятностной стратегии.
- (a) 50. Выпуклая оболочка в d -мерном пространстве. Пример из $2d$ вершин и 2^d граней. Нахождение множества вершин выпуклой оболочки симплексом.
- (+) 51. Метод внутренней точки.
- (+) 52. SDP. Постановка задачи. 0.878-OPT решение для MAX-CUT.

Суффиксный массив для биоинформатиков

- (*) 53. Что такое BWT, BWT^{-1} ? За какое время их умеют строить?
Какую задачу решает fm-index, чем он лучше бинарного поиска по суффиксному массиву?
- (a) 54. Сортировка строка за $\mathcal{O}(L + |A|)$, где L – сумма длин, A – алфавит.
- (a) 55. Алгоритм SA-IS построения суффиксного массива.
- (a) 56. BWT^{-1} за $\mathcal{O}(n)$.
- (a) 57. fm-index. Построение за $\mathcal{O}(n)$, ответ на запрос за $\mathcal{O}(|s|)$.
- (c) 58. Inplace SA. Постановка задачи: какая память есть, что можно менять, что нет. Цифровая сортировка возрастающих строк с одним буффером для countSort.
- (c) 59. Inplace SA. Переобозначение алфавита и технические трюки: цифровая сортировка без внешнего буфера.
- (c) 60. Inplace SA. Рекурсивный вызов: подготовка к нему; фаза «после рекурсивного вызова» – получение итогового массива.

Алгоритмы на графах и матрицы

- (a) 61. Определение: трёхсвязность. Выделение компонент трёх-связности за $\mathcal{O}(n)$.
- (a) 62. Динамические орграфы: вероятностный алгоритм для достижимости; алгоритм для full-dynamic-DAG за $\mathcal{O}(n^2)$ на запрос.
- (a) 63. Матрицы: сведение задачи к оптимальной триангуляции многоугольника за $\mathcal{O}(n)$.
- (a) 64. Матрицы: DP-решение «оптимальной триангуляции» для монотонного случая за $\mathcal{O}(n^2)$.
- (a) 65. Матрицы: жадное решение «оптимальной триангуляции» для монотонного случая за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- (a) 66. Матрицы: решение задачи «оптимальная триангуляция» в общем случае за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- (+) 67. Динамическая связность в online для неорграфа за $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

Факторизация

- (*) 68. Сформулируйте задачу «факторизация». Как gcd помогает решить задачу «факторизация»? За сколько работает метод Крайчика?
- (a) 69. Крайчик, проверяющий m чисел на b -гладкость за $\mathcal{O}(mb)$, и работающий за $\mathcal{O}(mb + b^3)$.
- (a) 70. Крайчик, проверяющий m чисел на b -гладкость за $\mathcal{O}(m \log \log m)$, и работающий за $\mathcal{O}(m \log \log m + b^2 \log m)$. Экономная по памяти реализация Крайчика.
- (a) 71. Извлечение корня по простому модулю. $\mathcal{O}(p^{1/2})$. $\mathcal{O}(\log p)$.
- (+) 72. Обоснование времени работы.

Паросочетания в произвольном графе

- (*) 73. Алгоритм поиска паросочетаний в произвольном графе за $\mathcal{O}(V^2 E)$ без подробности реализации и без доказательства.
- (b) 74. Лемма о дополняющем пути. Лемма имени Куна.
- (a) 75. Алгоритм поиска паросочетания сжатием соцветий за $\mathcal{O}(V^3)$.
- (b) 76. Обоснования: корректность алгоритма сжатия соцветий
- (a) 77. Реализация Габова алгоритма сжатия соцветий за $\mathcal{O}(V^3)$ без рекурсивного сжатия.
- (b) 78. Обоснования: корректность реализации Габова (почему ссылки $p[]$ не циклятся?).
- (a) 79. Оптимизации: алгоритм за $\mathcal{O}(|M| \cdot V^2)$, dfs vs bfs, поиск LCA за $\mathcal{O}(1)$.
- (a) 80. Оптимизации: жадная инициализация; DSU; $\mathcal{O}(|M| \cdot E \cdot \alpha)$.
- (a) 81. *Задача*: поиск минимального по весу простого пути из чётного числа рёбер.

Гамильтоновость и k -пути

- (b) 82. Татт. Перманент. Связь паросочетаний, определителей и гамильтоновых циклов. $\mathbb{F}_{2^{32}}$, построение поля, свойства поля.
- (a) 83. Гамильтонов путь в двудольном орграфе за $\mathcal{O}^*(2^{n/2})$.
- (c) 84. Гамильтонов путь в произвольном орграфе за $\mathcal{O}^*(2^{3n/4})$.
- (b) 85. k -путь за $\mathcal{O}^*(2^k)$ – все математические примитивы.
- (c) 86. k -путь за $\mathcal{O}^*(2^k)$ – собственно алгоритм поиска.
- (+) 87. k -путь за $\mathcal{O}^*(2^{3k/4})$.

Вычислительная геометрия

- (*) 88. Определения: диаграмма Вороного, триангуляция Делоне.
Алгоритм построения диаграммы Вороного за $\mathcal{O}(n^2)$.
- (a) 89. Локализация точки на плоскости. Формулировка задачи, решение.
- (a) 90. Построение выпуклой оболочки: Грэхем $\mathcal{O}(n \log n)$, Эндрю $\mathcal{O}(\text{sort}(n))$, Джарвис $\mathcal{O}(nk)$, Чен $\mathcal{O}(n \log k)$, если нам подсказали верное k .
- (a) 91. Выбор k для Чена, улучшение времени работы Чена до $\mathcal{O}(\frac{n}{k} \cdot \text{sort}(k))$.
- (a) 92. Биекция прямых и точек. Пересечение полуплоскостей за $\mathcal{O}(n \log k)$.
- (a) 93. Рандомизированные алгоритмы. Две ближайших точки за $\mathcal{O}(n)$.
Минимальный покрывающий круг за $\mathcal{O}(n)$. Точка пересечения n кругов за $\mathcal{O}(n)$.
- (a) 94. Построение триангуляции Делоне за $\mathcal{O}(n \log n)$. Только алгоритм.
- (b) 95. Построение триангуляции Делоне за $\mathcal{O}(n \log n)$. Обоснование времени работы.
- (a) 96. Сумма Минковского, определение, построение за $\mathcal{O}(n + m)$, использование для поиска пересечения движущихся выпуклых многоугольников.
- (a) 97. Применения триангуляций: для каждой пары найти ближайшую точку; MST на плоскости.
- (c) 98. Число точек в полуплоскости онлайн за $o(n^{0.5})$.
- (+) 99. Задачи. Выбрать k точек из n : диаметр $\rightarrow \min$. Перечислить все пары точек: расстояние $\leq d$.
- (+) 100. Даны n точек на плоскости. 3D-ортогональный-запрос минимум за $\mathcal{O}(\log n)$.
- (+) 101. Motion Planning. Поиск кратчайшего пути за $\mathcal{O}(n^2 \log n)$, произвольного пути за $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.

Планарные графы

- (*) 102. Что такое планарный граф, плоский граф? Сформулируйте теорему Эйлера, теорему Куратовского, теорему Липтона-Тарьяна про сепаратор.
- (b) 103. Теоремы: $E \leq 3V - 6$, $E \leq 2V - 4$ с доказательством.
Доказательство теоремы Куратовского в одну из сторон.
- (a) 104. Алгоритм Демукрона проверки на планарность. Оценка времени $\mathcal{O}(n^2)$.
- (a) 105. Пружинная теорема. Укладка графа прямыми отрезками.
- (b) 106. Доказательство того, что для СЛАУ из пружинной теоремы $\exists!$ решение.
Связь с потенциальной энергией.
- (b) 107. Трёхсвязность. Как сделать планарный граф трёхсвязным (с доказательством)?
Что ломается при отсутствии трёхсвязности?
- (a) 108. Алгоритм поиска сепаратора. MAX-IS и k-COLORING за $2^{\Theta(\sqrt{n})}$.
- (b) 109. Теорема Липтона-Тарьяна о существовании сепаратора с доказательством.
- (a) 110. Выделение граней плоского графа за $\mathcal{O}(\text{sort}(n))$.
- (a) 111. Gauss Elimination за $\mathcal{O}(n^{3/2})$. Закон Кирхгоффа (сопротивление сети проводников).
- (+) 112. Любой алгоритм укладки за $\mathcal{O}(n \log n)$.