

SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, весна 2024/25

Практика по алгоритмам #26

Потоки

17 апреля

Собрано 15 апреля 2025 г. в 15:26

Содержание

1. Потоки	1
2. Разбор задач практики	3
3. Домашнее задание	5
3.1. Дополнительная часть	5

Потоки

1. Форд-Фалкерсон не такой уж и медленный

Оцените время работы алгоритма Форда-Фалкерсона на произвольном графе с *единичными* пропускными способностями.

2. Паросочетания

Даны люди и работы. Известно, каким людям подходят какие работы. Для каждой работы известно, сколько максимум туда могут взять человек. Выбрать для каждого человека ровно две работы так, чтобы ограничения были соблюдены.

3. Вершинные пути

Найти k вершинно непересекающихся пути $a \rightsquigarrow b$ за $\mathcal{O}(V + E)$.

4. Разрез #1

Найти минимальное число рёбер, которое нужно удалить из неорграфа, чтобы из вершины a нельзя было добраться до b .

5. Разрез #2

Найти минимальное число вершин, которое нужно удалить из неорграфа, чтобы из вершины a нельзя было добраться до b .

6. Восстановление матрицы

Жила-была матрица из целых чисел от 0 до 100. Но пропала.

Вам даны суммы элементов матрицы в каждом столбце и каждой строке.

Восстановите матрицу. Проверьте, существует ли другая матрица с такими же свойствами.

7. Выбор ориентации

Дан неорграф, выберите ориентацию каждого ребра так, чтобы максимальная исходящая степень была как можно меньше.

8. Турнир

Дана матрица уже сыгранных матчей группового футбольного турнира «каждый с каждым». Ничьих не бывает. Победа даёт команде одно очко.

Можно ли так доиграть турнир, чтобы $\forall i$: i -я команда имела в итоге ровно a_i побед?

9. Карточки

Есть $n \leq 10^6$ двусторонних карточек, на каждой стороне маленькая латинская буква. Дана строка s . Можно ли (если да, то как) выбрать карточки, их порядок и их стороны так, чтобы получить строку s .

10. Красно-синие вершины

Дан неорграф, какие-то вершины покрашены в красный, какие-то в синий. (a) докрасить оставшиеся, чтобы пар соседних разноцветных было поменьше. (b) число вершин, у которых есть сосед другого цвета, $\rightarrow \min$. (c) у вершин есть веса $\sum w_v \rightarrow \min$.

11. (*) Взвешенные Cover, IS

Дан двудольный граф. У каждой вершины есть неотрицательный вес. Найти вершинное покрытие минимального веса, независимое множество максимального веса.

Указание: вспомните с лекции, как потоками искать в двудольном графе matching, IS, VC.

12. (*) Замкнутое подмножество (лекции по матану)

Каждой вершине орграфа сопоставлено число (возможно, отрицательное) – её вес.

Подмножество вершин A называется *замкнутым*, если из него не исходят рёбра в $V \setminus A$.

Найдите замкнутое подмножество вершин максимального суммарного веса.

13. (*) Разрез минимального среднего веса #1

Выбрать такое множество рёбер взвешенного орграфа, что после их удаления из s нет пути в t , а средний вес этих рёбер минимален.

Разбор задач практики

1. Форд-Фалкерсон не такой уж и медленный

$|f| \leq E \Rightarrow$ время работы $\mathcal{O}(E^2)$.

Точнее $|f| \leq \min(\deg_s, \deg_t)$. Без кратных ребер $\mathcal{O}(VE)$.

2. Паросочетания

Строим граф: исток $\rightarrow$ работы $\rightarrow$ люди $\rightarrow$ сток. Для рёбер в работу $c_e =$ её ограничение. Для рёбер из людей $c_e = 2$. Ищем максимальный поток, если $|f| =$ число людей $\cdot 2$, получилось.

3. Вершинно не пересекающиеся пути

Орграф: раздваиваем вершину, посередине ребро пропускной способности 1, входящие рёбра в первую половину, исходящие из второй.

4. Разрез #1

Величина потока из a в b .

5. Разрез #2

Раздваиваем вершины, далее величина потока из правой- a в левую- b .

6. Восстановление матрицы

Коротко: двудольный граф из строк и столбцов.

Решение. Соединяем с истоком n вершин-строк, на ребре пишем сумму в строке. Аналогично столбцы соединяем со стоком. Каждую строку соединяем с каждым столбцом, на ребре пишем 100. Числа на рёбрах – пропускные способности.

Пускаем $\max$ поток. Если какое-то из рёбер, соединенных со стоком и истоком, не насыщено, то ответа нет. Иначе ответ – поток на ребрах, соединяющих строки и столбцы.

7. Минимизация максимальной степени

Коротко: рассмотрим двудольный граф «рёбра $\rightarrow$ вершины».

Каждое ребро в зависимости от ориентации увеличит на 1 степень одного из концов.

Из истока s проводим ребро в каждую вершину исходного графа. Создаём для каждого ребра исходного графа по вершине, из них проводим рёбра пропускной способности 1 в сток. Если ребро $e = \{u, v\}$, то проводим рёбра $u \rightarrow e$ и $v \rightarrow e$ пропускной способности 1. Поток, пущенный по ребру $u \rightarrow e$ будет означать, что e ориентировано от u к v .

Рёбер в новом графе $V + 3E = \mathcal{O}(E)$.

а) $\mathcal{O}(E^2 \log V)$. Бинарный поиск по ответу: проверяем, можно ли d . Пишем d на рёбрах из s в вершины. Пускаем $\max$ поток, проверяем $|f| = E$ исходного графа. Поток за $\mathcal{O}(E \cdot |f|) = \mathcal{O}(E^2)$.

б) $\mathcal{O}(E^2)$. Пишем сначала $d = 1$, затем $d = 2$, и так далее, пока не найдётся поток размера E . При увеличении d мы для старого потока dfs-ом ищем новые пути, пока ищется.

Время работы: $\leq V$ не удачных запусков dfs-а и $\leq E$ удачных.

8. Турнир

Коротко: двудольный граф из команд и несыгранных матчей.

Решение. Заведём вершину для каждой команды, проведем в нее ребро из истока, пишем на нем число будущих побед этой команды. Заведём вершину для каждого еще не сыгранного матча, из нее ребро в сток, на ребре пишем 1. Проводим в каждый матч ребра из двух

команд, которые в нем играют, на ребрах 1. Пускаем тах поток. Если из команды в матч течет 1, то команда выиграла этот матч. Если не насытилось какое-то ребро из истока в команду или из матча в сток, то так доиграть невозможно.

9. Карточки

Мы знаем, сколько каких букв мы хотим. Из карточки два ребра – в две буквы, количество которых она может увеличить. Вершины: исток, карточки, 26 букв, сток.

10. Красно-синие вершины

- (a) Синие = исток, красные = сток. Ищем min разрез.
- (b) Раздвоим вершины, исходные рёбра $c_e = \infty$, рёбра-вершины $c_e = 1$.
- (c) Поменяем c_e рёбер-вершин на вес вершин.

11. (*) Взвешенные Cover, IS

Построим сеть для поиска паросочетаний: добавим слева исток и справа сток. Исходные рёбра сделаем веса $+\infty$ и направим слева направо. Теперь есть биекция между (S, T) -разрезами без бесконечных рёбер и вершинными покрытиями:

VC = вершины левой доли из $S \cup$ вершины правой доли из T .

Отсюда решение: на ребре, соединяющем вершину v с истоком или стоком, пишем w_v , на рёбрах исходного графа пишем $+\infty$. Ищем min разрез. $\max IS$ – дополнение к min VC .

12. (*) Замкнутое подмножество (лекции по матану)

Будем подгонять разрез в графе вида «исходные n вершин, исток, сток» под нашу задачу. Во-первых, каждое ребро исходного графа $i \rightarrow j$ добавим с пропускной способностью $+\infty \Rightarrow$ оно точно не войдёт в min разрез. Теперь подгоним пропускные способности из истока и в сток так, чтобы минимизация $C(S, T)$ максимизировала $W(S) = \sum_{v \in S} w_v$.

Заметим, что S точно замкнуто благодаря бесконечным рёбрам.

Распишем $W(S) =$

$$\sum_{v \in S, w_v \geq 0} w_v - \sum_{v \in S, w_v < 0} |w_v| = \sum_{w_v \geq 0} w_v - \sum_{v \notin S, w_v \geq 0} w_v - \sum_{v \in S, w_v < 0} |w_v| = \text{const} - \left(\sum_{v \notin S, w_v \geq 0} w_v + \sum_{v \in S, w_v < 0} |w_v| \right)$$

Хотим минимизировать то, что вычитается, а это ровно $C(S, T)$ в графе, где из стока проведены ребра в положительные вершины, а из отрицательных в сток.

13. (*) Разрез минимального среднего веса #1

Бинпоиск по ответу. Внутри пересчитаем веса (как в задаче «K-best»), возьмём жадно отрицательные рёбра, удалим их из графа, на оставшихся min cut. $\mathcal{O}(\text{flow} \cdot \log \text{MAX})$

Домашнее задание

1. (2) Цикл через данные вершины в неорграфе

Дан неориентированный граф.

Найти за $\mathcal{O}(E)$ вершинно простой цикл, проходящий через две данные вершины.

2. (2) Задача про трисочетание

Даны девочки, мальчики и собачки.

Для каждой пары «мальчик, девочка» известно, хочет ли девочка дружить с мальчиком.

Для каждой пары «собачка, девочка» известно, нравится ли собачка девочке.

Нужно максимальному количеству девочек выделить по мальчику и собачке так, что:

- а) каждый мальчик не более чем с одной девочкой;
- б) каждая собачка не более чем у одной девочки;
- с) девочка хочет дружить с выбранным ей мальчиком, и собачка ей нравится.

3.1. Дополнительная часть

1. (2) Равномерное распределение

Есть n рабочих и m работ. И есть матрица умений: «какой рабочий какие работы умеет делать». Нужно максимально равномерно распределить работы между рабочими. То есть, каждой работе сопоставить рабочего, который умеет делать эту работу, а кроме того минимизировать $\max_{i=1..n} k_i$, где k_i – количество работ, выданных i -му рабочему.

2. (2) Япония. Инструменты и заказы.

Ситуация из Японии. Есть заказы и инструменты. Для каждого заказа известен список инструментов, который нужен, чтобы его выполнить. Каждый инструмент сделан умелыми японскими рабочими, поэтому бесконечно прочный, его можно один раз купить и много раз использовать. У каждого инструмента есть цена p_i . У каждого заказа есть прибыль, которую можно получить, выполнив заказ. Вы – бедный китайский рабочий. У вас изначально нет инструментов, но зато вы можете под нулевой процент в банке взять сколь угодно большой кредит, чтобы купить инструментов.

Вопрос: какую максимальную прибыль вы можете получить?