SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, весна 2024/25

Практика по алгоритмам #25

Паросочетания

10 апреля

Собрано 10 апреля 2025 г. в 11:05

Содержание

1. Паросочетания	1
2. Разбор задач практики	2
3. Домашнее задание	5
3.1. Дополнительная часть	5
4. Разбор домашнего задания	6
4.1. Обязательная часть	6
4.2. Дополнительная часть	6

Паросочетания

1. Жадная инициализация. Найдите паросочетания размера $\frac{1}{2}|M|$.
2. Как писать Куна? Разбираем код `dfs`.
3. Обнуление пометок. Что, если не обнулять пометки? Как за $\mathcal{O}(V+E)$ найти >1 пути?
4. Найти замощение грида с дырками доминошками (видим двудольное).
5. Найти вершинное покрытие двудольного графа (повторение лекции).
6. Найти паросочетание, которое покрывает вершины из подмножества A левой доли.

7. Лемма Холла и Кун

Лемма Холла: $\exists$ или совершенное паросочетание, или множество $A: |A| > |N(A)|$.

Придумайте алгоритм, который находит или совершенное паросочетание, или такое A .

8. Единственность максимального паросочетания

По данному максимальному паросочетанию в *двудольном* графе проверить, является ли оно единственным. $\mathcal{O}(VE)$.

9. Двудольная клика

Найти максимальную двудольную клику (полный двудольный подграф) в двудольном графе.

10. Максимизация $|A| - |N(A)|$

Выбрать в двудольном графе множество A из левой доли, что $|A| - |N(A)| \rightarrow \max$.

$N(A)$ – множество соседей A в правой доле. $\mathcal{O}(VE)$.

11. Разбить вершины DAG-а на пути.

Каждая вершина должна лежать ровно в 1 пути. Кол-во путей $\rightarrow \min$. *Подсказка:* как из исходного графа сделать двудольный?

12. Ездят такси, но нам нечем платить (Виктор Цой)

По городу ездят такси. Город задаётся взвешенным графом, где вес ребра – время проезда по нему. Заказ такси задаётся начальной вершиной, конечной вершиной и временем отправления из начальной вершины. Выполнить все заказы, используя минимальное число машин.

13. (*) Разбиение на плавные подпоследовательности

Разбить массив на минимальное число подпоследовательностей таких, что в каждой подпоследовательности разность соседних элементов по модулю не превышает d . $\mathcal{O}(n^3)$.

14. (*) Покрасить рёбра двудольного регулярного графа в $\min$ число цветов.

15. (*) Найти паросочетание максимального веса, веса в вершинах первой доли.

Разбор задач практики

1. Жадная инициализация.

Каждое ребро пытаемся жадно взять. Если мы его взяли, а в оптимальном его нет, из оптимального выкинутся максимум два ребра, которые пересекаются с нашим.

2. Как писать Куна?

См. конспект ПМИ.

```

1 bool dfs(v):
2     u[v]=1
3     for (int x: g[v]) if (pa[x] == -1 || (!u[pa[x]] and dfs(pa[x])))
4         return (pa[x]=v), 1
5     return 0

```

3. Обнуление пометок.

```

used <-- 0
for v: if (pa[v] == -1 and u[v] == 0 and dfs(v)) M++

```

4. Найти замощение грида с дырками доминошками

Невырезанная клетка – вершина графа, граница между соседними клетками – ребро.

Покрытие доминошками – в точности паросочетание.

Осталось заметить, что граф двудольный (рассмотрим шахматную раскраску).

5. Найти вершинное покрытие двудольного графа.

См. конспект ПМИ.

6. Найти паросочетание, которое покрывает вершины из A .

Важно, что если вершина один раз покрыта Куном, больше она из паросочетания никуда не денется. Пусть доли L, R . Запустим Куна из всех вершин множества A в любом порядке. Если покрылось, хорошо, иначе покрыть нельзя.

Почему? Запуск Куна из вершин только A равносильно запуску Куна на графе из долей (A, R) , так как Кун никогда не смотрит на вершины левой доли, из которых его не запускали, ведь назад в левую долю мы ходим уже по ребрам из паросочетания.

Раз Кун корректен, он верно найдет паросочетание на графе из долей (A, R) .

7. Лемма Холла и Кун

Запускаем Куна. Пусть очередной dfs не нашел дополняющий путь. A – посещённые вершины левой доли. Обход неудачный $\Rightarrow$ в $N(A)$ нет свободных вершин $\Rightarrow$ у каждой в $N(A)$ есть пара в A (ребро паросочетания, по которому прошёл dfs). А ещё в A есть ровно одна вершина без пары – та, от которой запускались. Итого $|A| = |N(A)| + 1$.

8. Единственность максимального паросочетания

Простое решение: найти какое-нибудь, попытаться удалять каждое из $|M|$ рёбер, проверять, есть ли ЧДП за $\mathcal{O}(V + E)$.

Ответ: не единственно iff есть чередующийся чётный путь или цикл.

Док-во. Пусть паросочетаний два – M_1, M_2 .

Рассмотрим их симметрическую разность $M_1 \Delta M_2$, она состоит из путей и циклов.

Нечётных путей быть не может (M_1 и M_2 максимальны) $\Rightarrow$ нашли чётный путь или цикл.
 В другую сторону: если есть M и дополняющий путь или цикл, просто применим его к M .
Упрощение: есть чётный путь $\Rightarrow$ достаточно оставить первое ребро из свободной вершины.

Как искать? Ребро из свободной вершины: просто переберём. Как найти чётный цикл? dfs от Куна ищет путь в орграфе вершин 1-й доли (из 1-й во 2-ю и сразу обратно в 1-ую), ровно в этом орграфе нужно запустить стандартный алгоритм поиска цикла.

9. Двудольная клика

Решение: инвертируем ребра и находим в новом графе IS.

То есть, проведём между долями все ребра, которых не было, и удалим все, которые были. Любая клика в исходном графе G – независимое множество в новом G' .

Время работы выйдет $\mathcal{O}(V(V^2 - E)) = \mathcal{O}(V^3)$.

10. Максимизация $|A| - |N(A)|$

Пусть R – правая доля. Вместо $|A| - |N(A)| = |A| + |R \setminus N(A)| - |R|$. Константа $-|R|$ не влияет на максимизацию. $A \cup \{\text{не соседи } A\}$ – независимое множество.

Итого нас просят найти независимое множество и вернуть его вершины из левой доли.

11. Разбить вершины DAG-а на пути.

Коротко: раздвоим граф, найдём паросочетание, рёбра паросочетания образуют пути.

Возьмём двудольный граф по n вершин в каждой доли. Проведём ребро $i \rightarrow j$ исходного графа из i -й вершины первой доли в j -ую вершину второй доли. Такая операция называется «раздвоение орграфа». В раздвоенном графе возьмём рёбра максимального паросочетания, нарисуем их в исходном, получили разбиение на минимальное число путей.

Почему разбиение минимально? Во-первых, есть биекция между разбиениями на пути и паросочетаниями. Во-вторых, число путей равно $n - |M|$ (изначально n путей, каждое ребро паросочетания склеивает какие-то два).

12. Ездят такси, но нам нечем платить (Виктор Цой)

Сделаем заказы (`from`, `to`, `time`) вершинами графа. Ребро (a, b) проведем, если такси после запроса a может успеть обслужить запрос b , то есть $\text{time}_a + \text{dist}(\text{from}_a, \text{to}_a) + \text{dist}(\text{to}_a, \text{from}_b) \leq \text{time}_b$ (расстояния можно считать заранее). Граф ациклический, так как ребра ведут вперед по времени. Теперь то же, что в предыдущей задаче, для каждого заказа хотим найти предыдущий и следующий, обслуживаемый той же машиной.

13. (*) Разбиение на плавные подпоследовательности

Сопоставим каждому элементу массива вершины l_i и r_i . Проведем ребро $l_i \rightarrow r_j$ iff j может быть в подпоследовательности после $i \Leftrightarrow i < j$ и $|a_j - a_i| \leq X$.

Хотим для каждого элемента выбрать не более одного предыдущего и не более одного следующего, это как раз соответствует паросочетанию в таком графе. У скольких элементов нет следующего, столько и подпоследовательностей.

Min число подпоследовательностей $\Rightarrow$ min число непокрытых паросочетанием правых вершин (равное числу непокрытых левых) $\Rightarrow$ max паросочетание.

14. (*) Покрасить рёбра двудольного регулярного графа в min число цветов.

1. Покраска рёбер – разбиение рёбер на паросочетания.

2. В d -регулярном графе по Холлу есть совершенное паросочетание.

3. Если граф не регулярный, можно было бы его дополнить до регулярного.

15. (*) Найти паросочетание максимального веса, веса в вершинах первой доли.

Важно, что если вершина один раз покрыта Куном, больше она из паросочетания никуда не денется. Отсортировать по весам. Попытаться брать Куном в таком порядке. Доказательство от противного (пусть мы не взяли что-то из оптимального ответа [...]).

Домашнее задание

1. (2) Петя и гиперкуб

У маленького Пети любимая игрушка – d -мерный гиперкубик ($d \leq 10$). Некоторые вершины у куба белые, некоторые чёрные. Вы знаете цвета всех вершин, помогите Пете перекрасить как можно меньше белых вершин в красный цвет так, чтобы не было двух смежных по ребру белых вершин.

2. (2) Множество прямых

Дано N различных прямых. Выбрать $\max$ по размеру подмножество прямых, такое, что никакие две прямые не параллельны, и никакие прямые не пересекаются в точке с $x = 0$.

3.1. Дополнительная часть

1. (2) Удаление графа

Дан оргграф. За один ход можно удалить все входящие или все исходящие ребра одной вершины (но не одновременно). Удалить все рёбра графа за $\min$ число ходов.

2. (2) Быстрое паросочетание в регулярном графе

Дан 2^k -регулярный двудольный граф. Найдите совершенное паросочетание за $\mathcal{O}(E)$ (детерминированным алгоритмом). За $\mathcal{O}(E \log E)$ можно получить (1).

Разбор домашнего задания

4.1. Обязательная часть

1. ?

4.2. Дополнительная часть

1. ?