SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, осень 2024/25
Практика по алгоритмам #19

Scanline
13 февраля

Собрано 19 февраля 2025 г. в 16:46

Содержание

1. Scanline **1**

2. Разбор задач практики **2**

3. Домашнее задание **3**

3.1. Дополнительная часть 3

Scanline

1. Вспомните лекцию. Что там было?

2. **Эйлеров обход**

   Послушайте про Эйлеров обход дерева, придумайте

   a) LCA за $\langle \mathcal{O}(n \log n), \mathcal{O}(1) \rangle$.
   b) Научитесь делать $\min/\sum/$`+=`$/$`=` на поддереве за $\mathcal{O}(\log n)$.
   c) Даны два дерева. Научитесь отвечать на запрос (a, b) – найти кол-во $i: i$ лежит в поддереве a первого и поддереве b второго.

3. Запрос на массиве: количество чисел $\leqslant x$ на префиксе $[0, i)$.

4. Сумма в прямоугольнике в offline: даны n точек на плоскости и m прямоугольников, за $\mathcal{O}((n+m)\log(n+m))$ насчитать для каждого прямоугольника число точек внутри.

5. Сумма в прямоугольнике в online (заранее даны только точки).

6. Задача на воображение. Даны n отрезков на прямой; посчитать количество пар вложенных отрезков.

7. НВП с весами. Динамика за $\mathcal{O}(n^2)$, улучшаем деревом отрезков.

8. Посчитайте количество k-инверсий ($i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и $a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_k}$).

9. Задача на воображение: Количество различных на отрезке.

10. k-ая статистика на отрезке за $\mathcal{O}(\log^3 n) \to \mathcal{O}(\log^2 n)$.

11. k-ая статистика на отрезке за $\mathcal{O}(\log n)$.

12. `(*)` Локализация точки на плоскости за $\langle \mathcal{O}(n \log n), \mathcal{O}(\log n) \rangle$: дана карта стран (граф из непересекающихся прямых отрезков, граница каждой страны – многоугольник); поступает запрос «на территорию какой страны попала точка (x, y)».

13. `(*)` **ETT.** Дан лес. Запросы: добавить ребро; удалить ребро; в одном ли дереве x и y.

Разбор задач практики

1. **Вспомните лекцию. Что там было?**

   Только список без подробной начинки, чтобы понимать, какие задачи и чем решали.

   2D-сумма для n точек на плоскости сканирующей прямой.

   LCA двоичными подъёмами.

   Эйлеров обход: начало

2. **Эйлеров обход**

   См. конспект ПМИ.

   Эйлеров обход, который выписывает высоты вершин: $1, 2, 3, 2, 3, 2, 1$ сводит задачу LCA к RMQ, которую мы решаем спарсами за $\mathcal{O}(1)$. Если каждую вершину выписывать ровно один раз, например, в момент входа, то $\forall$ поддерево – отрезок $\Rightarrow$ мы умеем с помощью ДО считать $\min/\sum$ в поддереве за $\mathcal{O}(\log n)$ и делать `+=`/`=` на отрезке за $\mathcal{O}(\log n)$.

   Пересечение двух поддеревьев: у каждой вершины есть номер в первом дереве (координата x), номер во втором дереве (координата y); пересечение поддеревьев – отрезок x и отрезок $y \Rightarrow$ точки в прямоугольнике.

3. **Запрос на префиксе**

   В ДЗ делали через treap, можно через ДО. И то, и то можно делать персистентным.

4. Повторение лекций. Взяли события, отсортировали по x, внутри дерево отрезков на массиве $count[y]$.

5. Добавили персистентность. Нужные версии ищем бинпоиском по массиву версий.

6. Отрезок задаётся двумя числами $\Rightarrow$ точка на плоскости $\Rightarrow$ для каждого отрезка посчитать число точек в двумерном углу.

7. Динамика $f[i] = w[i] + \min_{j<i, a_j>a_i} f[j]$, внутренний минимум — запрос к ДО (сканлайн по i, внутри одномерное ДО на массиве $t[a[j]] = f[j]$).

8. Динамика $f[k, i] = \sum_{j<i, a_j>a_i} f[k-1, j]$. Также, как предыдущая при переходе слой $k-1 \to$ слой k.

9. Для каждого x хотим учесть только самое левое вхождение $\Rightarrow$ такое $i\colon L \leqslant i \leqslant R$, $prev[i] < L$, где $prev[i]$ – позиция такого же равного. $2D$ запрос.

10. Бинпоиск по ответу. Внутри $2D$ запрос, который мы научились делать за log.

11. Персистентным ДО для каждого префикса насчитали нужное ДО, вместо бинпоиска по ответу параллельно спускаемся по двум деревьям.

12. `(*)` Сканирующая вертикальная прямая, храним `set` отрезков, которые пересекают текущую прямую.

13. `(*)` **ETT.** См. конспект ПМИ.

Домашнее задание

1. **(2) Вложения**

   Даны n отрезков на прямой, найти максимальное по размеру множество попарно вложенных отрезков.

2. **(2+1) Вложения**

   Даны n прямоугольников на плоскости. Поступают запросы $get(x, y)$: «сколько прямоугольников накрывают точку (x, y)». (a) **(2)** Offline. (b) **(+1)** Online.

3.1. Дополнительная часть

1. **(2) Динамичное дерево**

   Придумайте структуру данных, которая умеет проделывать с деревом следующее:

   a) подвесить за вершину p новый лист с номером v и ценностью w;
   b) найти $LCA(a, b)$;
   c) найти самую ценную вершину в поддереве вершины u;
   d) найти расстояние от a до b.