

SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, осень 2024/25

Практика по алгоритмам #13

Потенциал Форда-Беллмана

12 декабря

Собрано 12 декабря 2024 г. в 11:04

Содержание

1. Потенциал Форда-Беллмана	1
2. Разбор задач практики	3
3. Домашнее задание	4
3.1. Дополнительная часть	4

Потенциал Форда-Беллмана

1. Порог достижимости

Для каждой пары вершин в графе найти $w[a, b]$ – такой минимальный вес, что из a в b есть путь по рёбрам веса $\leq w[a, b]$.

2. Система неравенств

Дана система из m неравенств на n переменных вида $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$.
Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $\mathcal{O}(nm)$.

3. Обмен валют

Есть n валют и m обменников. i -й обменник предлагает менять валюту a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i . Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные m обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты. $\mathcal{O}(nm)$.

(*) А теперь обменники берут комиссию? То есть мы меняем x валюты на $(x - fee) \cdot \alpha$.

4. Найдите Цикл минимального среднего веса.

5. Послушайте сказку про потенциалы. Какие потенциалы взять, чтобы все веса стали ≥ 0 ?

6. Флойд vs Джонсон

В графе n вершин и m ребер, какой алгоритм выбрать для APSP?
Вспомните Флойда. А за сколько умеете с помощью потенциалов?

7. Отрицательные циклы

Для каждой вершины графа узнать, есть ли отрицательный цикл через нее.

8. Найдите кратчайший путь из s в t длины ровно k рёбер. $\mathcal{O}(k \cdot E)$.

9. Флойд и битовое сжатие

Найдите транзитивное замыкание графа за $\mathcal{O}(\frac{V^3}{w})$.

10. Форд-Беллман на случайном графе

За сколько ровно работает Форд-Беллман break? А на случайном графе?

11. (*) Форд-Беллман и число итераций

Пусть алгоритм Беллмана-Форда на каждой итерации рассматривает ребра в таком порядке:

1. Рёбра из меньшей вершины в большую в порядке *возрастания* номера исходящей вершины.
2. Рёбра из большей вершины в меньшую в порядке *убывания* номера исходящей вершины.

Докажите, что алгоритм найдет все кратчайшие пути за $\frac{n}{2}$ итераций.

12. (*) Добавим рандомчика и получим матожидание $\frac{n}{3}$ итераций.

13. (*) Форд-Беллман с очередью

Постройте ациклический оргграф, на котором этот алгоритм работает за $\Omega(VE)$.

14. (*) Реальная задача

Дан взвешенный граф, длина пути из k рёбер $= A \cdot k + B \cdot \sum w_e$. Константы $A, B > 0$, но не даны. Для каждого ребра e проверьте, \exists ли такие A, B , что e не лежит ни на одном кратчайшем пути.

Разбор задач практики

1. ?

Домашнее задание

1. (2) Матрица расстояний с уменьшением ребер

На запрос «уменьшился вес ребра» за $\mathcal{O}(n^2)$ пересчитывать матрицу расстояний.

2. (2) Почти все неотрицательные веса

В орграфе почти все ребра имеют неотрицательные веса.

Найдите кратчайший путь из s в t за $\mathcal{O}(m \log n)$.

а) (1) Неотрицательны все, кроме ребер, смежных с s, t .

б) (+1) Неотрицательны все, кроме ребер, смежных с s, t, x (какая-то третья вершина).

3.1. Дополнительная часть

1. (2) Dynamic connectivity in directed graph

Дан ациклический орграф. Нужно за $\mathcal{O}(n^2)$ обрабатывать запросы «добавить ребро» и «удалить ребро». Гарантируется, что граф всегда остается ациклическим. Также нужно за $\mathcal{O}(1)$ отвечать на запрос «есть ли путь из a в b »?

Подсказка: наш алгоритм будет вероятностным.

2. (2) Отрицательные циклы, в очередь!

Предложите алгоритм поиска отрицательного цикла в случайных графах размера $V, E \leq 10^5$.

3. (2) Графы без отрицательных циклов

Предложите алгоритм построения случайного взвешенного графа без отрицательных циклов. $V, E \leq 10^5$.