SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, осень 2024/25
Практика по алгоритмам #11

dfs. Полное погружение.

28 ноября

Собрано 27 ноября 2024 г. в 23:26

Содержание

1. dfs. Полное погружение. **1**

2. Разбор задач практики **2**

3. Домашнее задание **4**

3.1. Дополнительная часть 4

dfs. Полное погружение.

1. **Единственность топсорта**

   Дан ацикличный орграф, проверить единственность топсорта за $\mathcal{O}(V+E)$.

2. **Проверка сильной связности**

   Предложите максимально простой способ проверить, является ли граф сильносвязным.

3. **Плотный но не связный**

   Сколько максимум рёбер может быть в орграфе из n вершин, чтобы в нём было n компонент сильной связности?

4. **3-связность**

   Проверить граф на 3-связность

   a) вершинная за $\mathcal{O}(VE)$;
   b) рёберная за $\mathcal{O}(VE)$.

5. **Двусвязность**

   Предложите алгоритмы нахождения компонент рёберной двусвязности:

   (a) самый простой, (b) сразу по ходу поиска мостов.

6. **Эйлеровость**

   a) Дополнить неорграф до Эйлерова минимальным числом ребер. $\mathcal{O}(V+E)$.
   b) Разбить все ребра *неор*графа на минимальное число путей за $\mathcal{O}(V+E)$.
   c) Найти гамильтонов цикл на графе бинарных строк длины n. Ребро между строками есть, если $(n-1)$-суффикс первой строки совпадает с $(n-1)$-префиксом второй строки.
   d) `(*)` Найти 0-1 строку min длины, содержащую как подстроки все 0-1 строки длины n.

7. **Транзитивное замыкание**

   Дан орграф, построить матрицу достижимости. $V \leqslant 20\,000$, $E \leqslant 200\,000$. $\mathcal{O}(VE)$ даст TL.

   1. Пусть граф – DAG.
   2. Как случай роизвольного орграфа свести к DAG?

Разбор задач практики

1. **Единственность топсорта**

   Делаем topsort, проверяем, что из каждой вершины есть ребро в следующую =)

   И правда, если между какими-то соседями нет ребра, их можно поменять местами.

2. **Проверка сильной связности**

   Из вершины 1 запустить два dfs – по прямым и по обратным рёбрам, проверить, что оба пометили все вершины.

3. **Плотный но не связный**

   Полный граф, где все рёбра направлены $i < j \colon i \to j$. $\frac{1}{2}n(n-1)$.

4. **3-связность**

   a) Вершинная. Нужно узнать, можно ли удалением двух вершин разрушить связность. Одну переберем, удалим, на оставшемся графе за $\mathcal{O}(E)$ проверяем наличие точек сочленения.
   b) Рёберная. Можно так же перебрать, выйдет $\mathcal{O}(E^2)$. Но ясно, что для разрушения связности нужно удалить хоть одно ребро из остовного дерева. Так что перебираем только $\mathcal{O}(V)$ ребер.

5. **Двусвязность**

   Простой: нашли мосты, убрали, нашли компоненты связности.

   Элегантный: пока ищем мосты, на стеке как раз копятся вершины компоненты, когда нашли мост, сняли со стека компоненту Подробнее: см. конспект ПМИ.

6. **Эйлеровость**

   a) *Дополнить неорграф до Эйлерова.*

      Если граф связен – любым образом паросочетаем нечётные вершины.
      Если несвязен, выписываем компоненты связности по циклу и сперва добиваем связности, добавляя рёбра между соседними компонентами. Если какая-то компонента содержит только чётные вершины, в какую-нибудь вершину проведём два ребра.

   b) *Разбить ребра на минимальное число путей.*

      Все компоненты связности обработаем независимо. Дополним связный граф до Эйлерова, найдём Эйлеров цикл, удалим добавленные ранее рёбра, цикл распался на пути.

      Путей будет столько же, сколькими ребрами дополнили до Эйлерова. Наоборот, имея пути, можно их по циклу соединить и получить Эйлеров. Так что минимизация этих задач эквивалентна.

   c) *Найти гамильтонов цикл на графе 0-1 строк длины n.*

      Гамильтонов не умеем искать быстро. Умеем Эйлеров.
      Построим граф, в котором 0-1 строки длины n – рёбра. Вершинами будут строки длины $n-1$. Ребро соединяет свой суффикс длины $n-1$ со своим префиксом длины $n-1$.
      Граф ориентированный. Ребро: префикс $\to$ суффикс. У каждой вершины входящая степень = исходящей = 2 $\Rightarrow \exists$ Эйлеров цикл.

d) *0-1 строка* min *длины, содержащая как подстроки все 0-1 строки длины n.*

Пишем строку из $n-1$ нуля, затем берем граф из прошлого пункта и пишем по символу с ребер в порядке Эйлерова обхода, стартующего с вершины из $n-1$ нуля. Тогда все подстроки длины n будут разными, длина 2^n+n-1.

7. **Транзитивное замыкание**

Сконденсируем граф. Из каждой вершины достижима её ксс и ещё какие-то. Какие?

Динамика по конденсации `bitset dp[v]` – множество вершин, достижимых из v.
`dp[v]` – это `OR` bitset'ов детей v. Динамика ленивая (dfs-о-динамика).

Время работы $\mathcal{O}(VE/w)$.

Домашнее задание

1. **(2) Необходимые для достижимости ребра**

   Дан неорграф и две вершины a и b. Найдите все рёбра, которые обязательно будут лежать на любом пути от a до b. $\mathcal{O}(V+E)$.

2. **(2) Дополнение до сильной связности**

   Вам дан орграф. Проверьте за $\mathcal{O}(V+E)$, можно ли добавить в него одно ребро, чтобы он стал сильносвязным.

3.1. Дополнительная часть

1. **(2) Разбиение на паросочетания**

   Дан 2^k-регулярный граф (степени всех вершин равны 2^k).
   Нужно разбить все его ребра на *совершенные паросочетания* за $\mathcal{O}(kE)$.
   Совершенное паросочетание – 1-регулярный граф.