

SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, осень 2024/25

Практика по алгоритмам #9

Динамика 3. Пробуждение силы.

14 ноября

Собрано 13 ноября 2024 г. в 19:28

Содержание

1. Динамика 3. Пробуждение силы.	1
2. Домашнее задание	2
2.1. Дополнительная часть	2

Динамика 3. Пробуждение силы.

1. Напишите целое число, соответствующее множеству

(a) $\{3, 5\}$, (b) $\{0, 2, 3\}$

2. Операции с множествами за $\mathcal{O}(1)$

Пусть даны множества A и B из элементов $0..63$, как за $\mathcal{O}(1)$

- Найти их пересечение?
- Найти их разность?
- Посчитать размер A ?
- Проверить, является ли A подмножеством B ?

3. Универсум

Как за $\mathcal{O}(1)$ найти целое число, соответствующее множеству $\{0, 1, \dots, k\}$? ($k \leq 63$)

4. Различные и далёкие

Дан массив объектов. У каждого объекта есть стоимость $cost_i$ и тип $type_i \leq k$.

Выберите множество объектов максимальной суммарной стоимости так, что у каждой пары объектов типы различны, а разность индексов хотя бы d . $n \leq 100$, $k \leq 10$.

5. Пираты!

Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут a_i и время t_i , через которое пират приплывет и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут a и угловая скорость вращения ω . Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну выбрать правильный порядок уничтожения пиратов, чтобы не допустить непотребства. $\mathcal{O}(n^2)$.

6. Число топологических сортировок

Сколько способов упорядочить вершины графа так, чтобы все рёбра шли из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером? (a) $\mathcal{O}(2^n n^2)$, (b) $\mathcal{O}(2^n n)$.

7. Коллекционер (SetCover)

В мире есть n типов марок. На рынке есть m предложений вида «за $cost_i$ купить множество марок A_i ». Купить марки так, чтобы в вашей коллекции каждый тип марки встречался хотя бы один раз. За минимальную стоимость. $\mathcal{O}(2^n \cdot m)$.

8. Vertex Cover

Нужно покрасить вершины графа в минимальное число цветов так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. (a) $\mathcal{O}(4^n)$, (b) $\mathcal{O}(3^n)$.

9. (*) Гамильтонов путь

Вы уже умеете искать его за $\mathcal{O}(2^n n^2)$, улучшите до $\mathcal{O}(2^n n)$.

10. (*) Развозка мебели

У нас есть один грузовик грузоподъёмности W и куча предметов, вес i -го предмета w_i . Нужно перевезти все предметы за минимальное число заездов. (a) $\mathcal{O}(3^n)$. (b) $\mathcal{O}(2^n \cdot n)$.

Домашнее задание

Важно, чтобы вы выписали формулами, что храните в динамике, состояние динамики, переходы динамики. Без этого ваши решения проверяться не будут.

1. (2) Число бит

Вам нужно за 2^n одним циклом `for` построить массив длины 2^n :
`bits[x]` = число единичных битов в x , где x число от 0 до 2^n .

2. (2) Пары

Посчитайте число способов разбить вершины на пары так, чтобы каждая вершина была ровно в одной паре и вершины внутри каждой пары были соединены ребром. $\mathcal{O}(2^n n^2)$.

2.1. Дополнительная часть

1. (2) Сложные пары

Будьте достаточно ленивы и решите задачу (2) для $n \leq 32$.