

SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, осень 2024/25

Практика по алгоритмам #8

Динамика 2. Новая надежда.

7 ноября

Собрано 11 ноября 2024 г. в 15:43

Содержание

1. Динамика 2. Новая надежда.	1
2. Домашнее задание	3
2.1. Дополнительная часть	3

Динамика 2. Новая надежда.

1. Палиндромы

Сколько способов разбить строку на минимальное число палиндромов? Как решить рекурсивным перебором? Как динамикой? Получите $\mathcal{O}(n^2)$, сделав предподсчёт $is[L, R]$.

2. Куски массива

Сколько способов разбить массив на k кусочков так, чтобы сумма стоимостей кусочков была \min ? Пример стоимости: квадрат суммы.

3. Странное путешествие

Изначально вы стоите в точке s . За ход можно из x перейти в точку $x \cdot a_1 \bmod N$, заплатив c_1 , или перейти в точку $x \cdot a_2 \bmod N$, заплатив c_2 . За какую минимальную стоимость можно попасть в точку t , если можно сделать не более k шагов?

4. Редакционное расстояние

Даны строки s и t . Сколько ошибок нужно сделать в строке s , чтобы получить t ? Ошибки бывают трёх типов: добавить лишний символ (вставка), пропустить символ (удаление), написать не тот один символ (замена).

5. Ровный абзац

Дан текст (набор слов) с длинами l_1, l_2, \dots, l_n . Разбить текст на строки длины не более L . Менять порядок слов и переносить слова нельзя. Между каждой парой слов стоит хотя бы один пробел, остаток строки заполнен пробелами.

Минимизировать $\sum \text{gap}_i^3$, где gap_i – число пробелов в строке i . $\mathcal{O}(nL)$.

6. Борьба с деревом

Найдите \max по весу независимое множество вершин в дереве.

7. Рюкзак с большими весами

Рюкзак. $n \leq 1000$, $w_i \leq 10^9$, $\text{cost}_i \leq 100$.

Унести в рюкзаке размера $W \leq 10^9$ предметы максимальной стоимости.

8. Произведение матриц

Нужно посчитать произведение матриц $A_1 A_2 \dots A_n$ за минимальное число операций. Матрицы размеров $n \times k$ и $k \times m$ умножаются за nkm операций и дают матрицу размера $n \times m$. Не тривиальный пример: $(n \times 1) \cdot (1 \times n) \cdot (n \times n)$.

9. Свертка

Дана строка из латинских букв длины n , нужно ее запаковать в максимально короткую, используя правило $n(S) = \underbrace{SS \dots S}_n$.

Пример: NEERCYESYESYESNEERCYESYESYES $\rightarrow 2(\text{NEERC3}(\text{YES}))$.

10. (*) Профессор и железные яйца

У профессора есть k яиц и n этажное здание. Он хочет узнать максимальное x : если яйцо бросить с x -го этажа, оно не разобьётся. Не разбившиеся яйца можно переиспользовать. Минимизировать число бросков в худшем случае.

Время работы решения: $\mathcal{O}(n^2k) \rightarrow \mathcal{O}(nk \log n) \rightarrow \mathcal{O}(nk) \rightarrow \mathcal{O}(n \log n) \rightarrow o(n)$.

(**) Решите для заоблачных зданий $k, n \leq 10^9$.

Домашнее задание

Важно, чтобы вы выписали формулами, что храните в динамике, состояние динамики, переходы динамики. Без этого ваши решения проверяться не будут.

1. (2+1) Сколько существует одиозных билетов?

Одиозный билет – строка из $2n$ цифр такая, что сумма цифр в первой половине больше либо равна сумме цифр во второй половине. Нужно решение за $\mathcal{O}(n^2)$.

(2) (a) Сколько существует строк из n цифр с суммой цифр ровно n ?

(1) (b) Сколько существует одиозных билетов?

2.1. Дополнительная часть

1. (3) Мост

У вас есть a брёвен длины x и b брёвен длины y . Брёвна можно выкладывать подряд в ряд. Вы хотите построить мост из w рядов брёвен. Какое может быть самое большое L , что все ряды имеют длину хотя бы L ? Пусть $a, b, x, y, w \leq n$, асимптотика записывается через n .

(1) Решение за полином.

(2) Решение за куб.

(3) Более быстрые решения.