

SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, осень 2024/25

Практика по алгоритмам #8

Динамика 2. Новая надежда.

7 ноября

Собрано 11 ноября 2024 г. в 15:43

---

## Содержание

1. Динамика 2. Новая надежда.	1
2. Домашнее задание	3
2.1. Дополнительная часть . . . . .	3

## Динамика 2. Новая надежда.

### 1. Палиндромы

Сколько способов разбить строку на минимальное число палиндромов? Как решить рекурсивным перебором? Как динамикой? Получите  $\mathcal{O}(n^2)$ , сделав предподсчёт  $is[L, R]$ .

### 2. Куски массива

Сколько способов разбить массив на  $k$  кусочков так, чтобы сумма стоимостей кусочков была  $\min$ ? Пример стоимости: квадрат суммы.

### 3. Странное путешествие

Изначально вы стоите в точке  $s$ . За ход можно из  $x$  перейти в точку  $x \cdot a_1 \bmod N$ , заплатив  $c_1$ , или перейти в точку  $x \cdot a_2 \bmod N$ , заплатив  $c_2$ . За какую минимальную стоимость можно попасть в точку  $t$ , если можно сделать не более  $k$  шагов?

### 4. Редакционное расстояние

Даны строки  $s$  и  $t$ . Сколько ошибок нужно сделать в строке  $s$ , чтобы получить  $t$ ? Ошибки бывают трёх типов: добавить лишний символ (вставка), пропустить символ (удаление), написать не тот один символ (замена).

### 5. Ровный абзац

Дан текст (набор слов) с длинами  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Разбить текст на строки длины не более  $L$ . Менять порядок слов и переносить слова нельзя. Между каждой парой слов стоит хотя бы один пробел, остаток строки заполнен пробелами.

Минимизировать  $\sum \text{gap}_i^3$ , где  $\text{gap}_i$  – число пробелов в строке  $i$ .  $\mathcal{O}(nL)$ .

### 6. Борьба с деревом

Найдите  $\max$  по весу независимое множество вершин в дереве.

### 7. Рюкзак с большими весами

Рюкзак.  $n \leq 1000$ ,  $w_i \leq 10^9$ ,  $\text{cost}_i \leq 100$ .

Унести в рюкзаке размера  $W \leq 10^9$  предметы максимальной стоимости.

### 8. Произведение матриц

Нужно посчитать произведение матриц  $A_1 A_2 \dots A_n$  за минимальное число операций. Матрицы размеров  $n \times k$  и  $k \times m$  умножаются за  $nkm$  операций и дают матрицу размера  $n \times m$ . Не тривиальный пример:  $(n \times 1) \cdot (1 \times n) \cdot (n \times n)$ .

### 9. Свертка

Дана строка из латинских букв длины  $n$ , нужно ее запаковать в максимально короткую, используя правило  $n(S) = \underbrace{SS \dots S}_n$ .

Пример: NEERCYESYESYESNEERCYESYESYES  $\rightarrow 2(\text{NEERC3}(\text{YES}))$ .

## 10. (\*) Профессор и железные яйца

У профессора есть  $k$  яиц и  $n$  этажное здание. Он хочет узнать максимальное  $x$ : если яйцо бросить с  $x$ -го этажа, оно не разобьётся. Не разбившиеся яйца можно переиспользовать. Минимизировать число бросков в худшем случае.

Время работы решения:  $\mathcal{O}(n^2k) \rightarrow \mathcal{O}(nk \log n) \rightarrow \mathcal{O}(nk) \rightarrow \mathcal{O}(n \log n) \rightarrow o(n)$ .

(\*\*) Решите для заоблачных зданий  $k, n \leq 10^9$ .

## Домашнее задание

*Важно, чтобы вы выписали формулами, что храните в динамике, состояние динамики, переходы динамики. Без этого ваши решения проверяться не будут.*

### 1. (2+1) Сколько существует одиозных билетов?

Одиозный билет – строка из  $2n$  цифр такая, что сумма цифр в первой половине больше либо равна сумме цифр во второй половине. Нужно решение за  $\mathcal{O}(n^2)$ .

(2) (a) Сколько существует строк из  $n$  цифр с суммой цифр ровно  $n$ ?

(1) (b) Сколько существует одиозных билетов?

## 2.1. Дополнительная часть

### 1. (3) Мост

У вас есть  $a$  брёвен длины  $x$  и  $b$  брёвен длины  $y$ . Брёвна можно выкладывать подряд в ряд. Вы хотите построить мост из  $w$  рядов брёвен. Какое может быть самое большое  $L$ , что все ряды имеют длину хотя бы  $L$ ? Пусть  $a, b, x, y, w \leq n$ , асимптотика записывается через  $n$ .

(1) Решение за полином.

(2) Решение за куб.

(3) Более быстрые решения.