

SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, осень 2024/25

Практика по алгоритмам #3

Сортировки, медианы, кучи

19 сентября

Собрано 30 сентября 2024 г. в 20:24

Содержание

1. Сортировки, медианы, кучи	1
2. Домашнее задание	2
2.1. Дополнительная часть	2

Сортировки, медианы, кучи

1. Дедлайны

Есть несколько заданий, i -е нужно делать t_i времени.

Вам нужно сделать max число заданий, успеть к общему для всех заданий дедлайну D .

2. Отрезки времени

Даны N отрезков времени $[L_i, R_i]$, проверить, пересекаются ли хотя бы какие-то из них.

3. Сортировка без памяти

Есть массив пирожков, содержащий пирожки трёх типов: 1, 2, 3.

Отсортируйте его по типу пирожков за $\mathcal{O}(n)$ времени, используя $\mathcal{O}(\log n)$ бит памяти.

4. Точки на прямой

Даны n точек x_i на прямой. Выберите точку x^* : $\sum_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$. Легенда: хотим на шоссе построить магазин, чтобы среднее расстояние от поселений до него было поменьше.

5. Куча точек

А теперь точки добавляются. После каждого добавления выдавать оптимальную x^* .

6. Точки с весами на прямой

Даны n точек x_i на прямой, у точек есть веса $w_i > 0$. Выберите точку x^* : $\sum_i w_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$. Легенда: та же, теперь учитываем, что у поселений разное население.

7. Куча пар точек

На прямой живут точки. Иногда добавляются новые. Поддерживать пару ближайших.

8. Моделирование

n человек бегут по прямой в одну сторону, i -й человек начинает в x_i , бежит со скоростью v_i , все скорости различны. Если i догоняет j , то j расстраивается и уходит. Для каждого человека узнайте, скольких он расстроит.

9. Ускорение SiftUp

Модифицируйте операцию SiftUp для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\mathcal{O}(\log \log n)$ сравнений.

10. Статистика в бинарной куче

Дана бинарная min-куча. Найти k -ую статистику за: (a) $\mathcal{O}(k \log n)$; (b) $\mathcal{O}(k^2)$; (c) $\mathcal{O}(k \log k)$.

11. (*) Anti-QuickSort test

Пусть в качестве разбивающего элемента всегда берётся

(a) первый элемент $a[l]$; (b) средний элемент: $a[\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$.

Построить массив длины n , на котором QuickSort отработает за $\Omega(n^2)$.

12. (*) Второй максимум

Найти второй максимум в массиве за $n + \mathcal{O}(\log n)$ сравнений.

Домашнее задание

1. (3) Пустые места

У нас есть $n \leq 10^6$ изначально ничьих мест.

Если занятым местом T дней не пользовался владелец, оно вновь объявляется ничьим.

Поступают запросы двух типов «в день t_i кто-то хочет занять себе новое место», ответом на который нужно выделить свободное место с наименьшим номером, и запрос «в день t_i кто-то попользовался своим местом». $t_i \uparrow$. Обработайте $q \leq 10^6$ таких запросов.

2.1. Дополнительная часть

1. (1+1) Сентябрь. Дожди

Представьте себе ряд из n бесконечно высоких стаканов с дном 1×1 см².

Дно i -го стакана расположено на высоте a_i . В эту систему сверху залили T см³ воды.

Все стаканы снизу соединены тонкими трубками \Rightarrow

в итоге уровень поверхности воды будет одинаковым во всех стаканах.

Найти итоговый уровень воды за (1) $\mathcal{O}(n \log n)$ и (1) $\mathcal{O}(n)$.