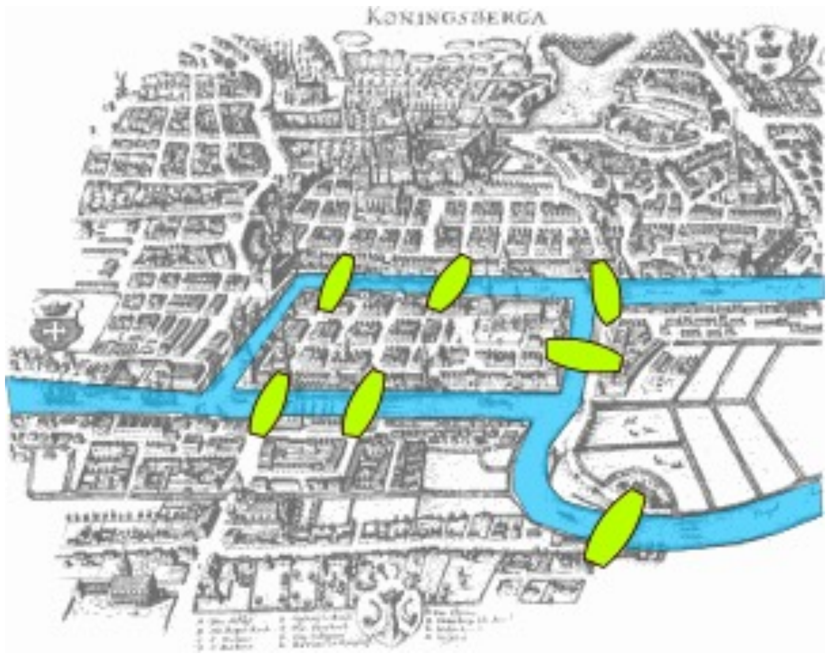
Дискретная математика

Лекция 1

Тема: Теория графов

Введение в теорию графов

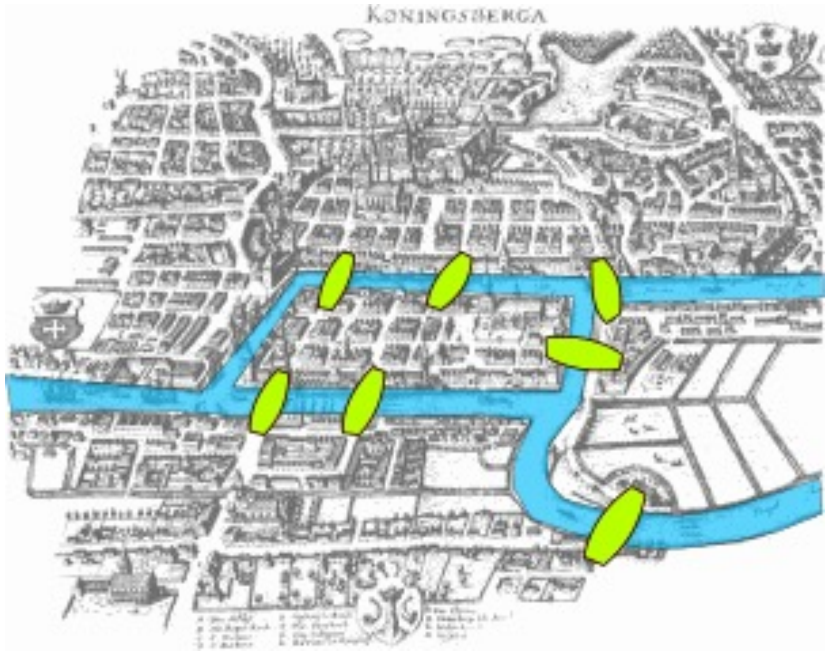


1736

Эйлер

SevenBriges of Königsberg

Введение в теорию графов



1736

Эйлер

Seven Briges of Königsberg

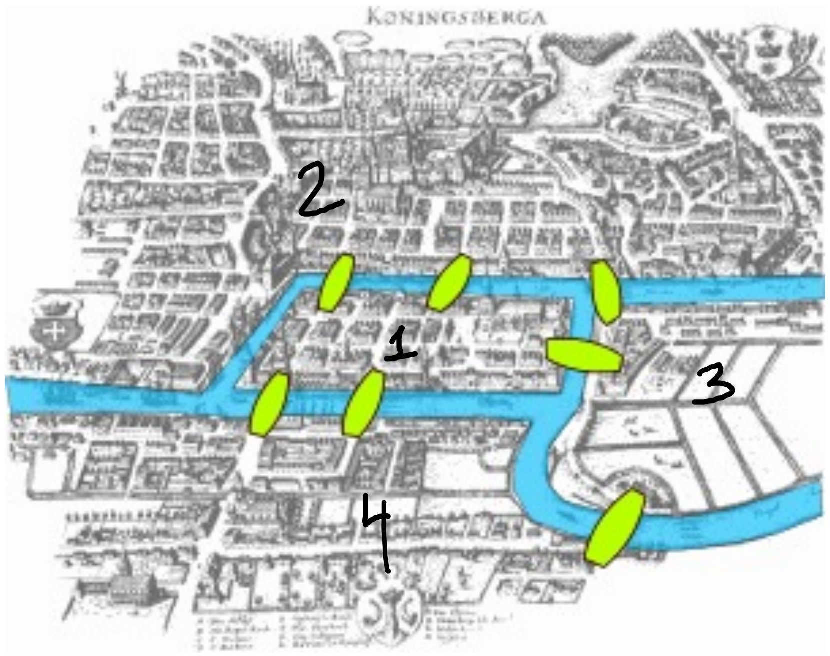
Харари

Андерсен

Шевелев

Асанов

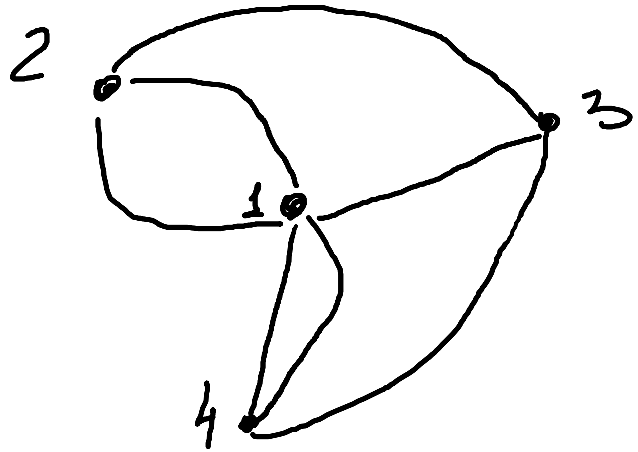
Введение в теорию графов



1736

Эйлер

Seven Briges of Königsberg



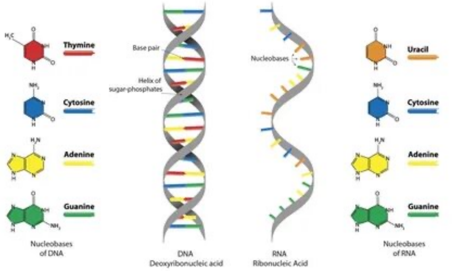
Харари

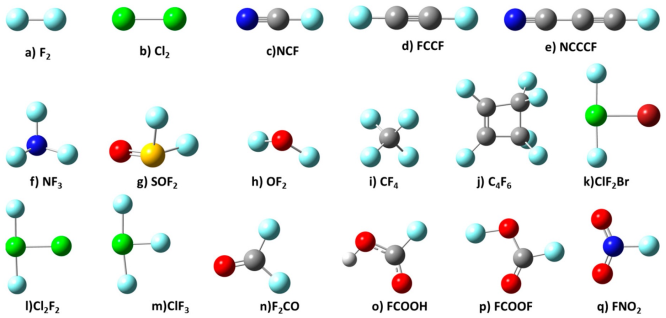
Андерсен

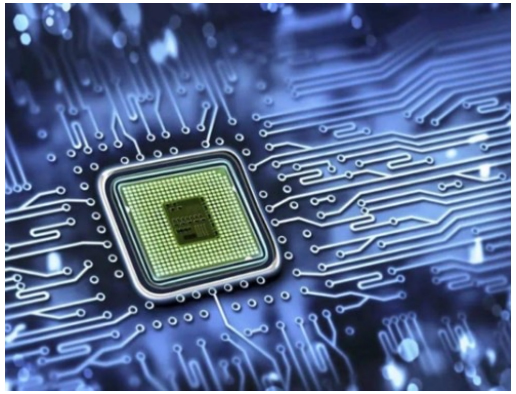
Шевелев

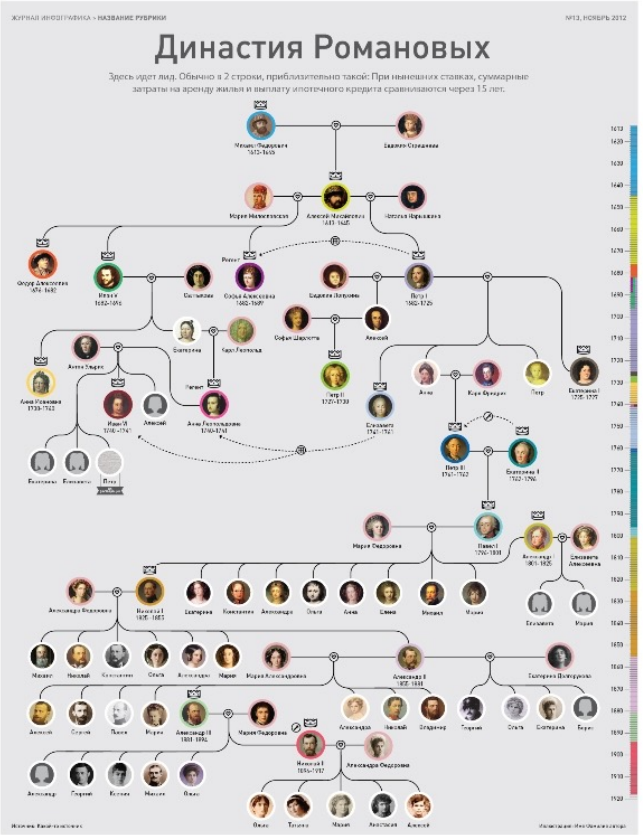
Асанов

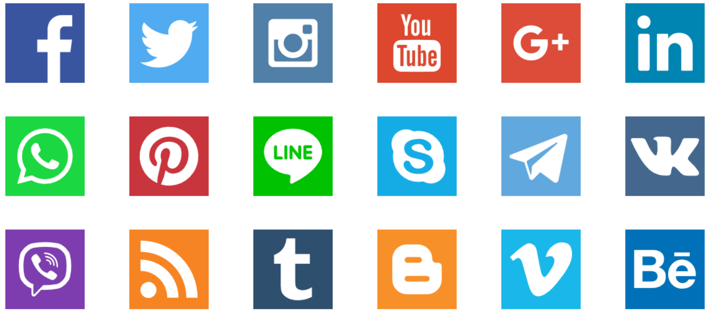
Введение в теорию графов











Базовые определения и понятия теории графов

Введение в теорию графов

Опр **Граф $G\ (V,E)$** — множество вершин (*vertices, nodes, points*) V и множество ребер E, такое, что

$$E \subseteq \{\{u,v\} : u,v \in V\}$$

является подмножеством множества двухэлементных подмножеств множества V (для неориентированного *Undirected* графа)

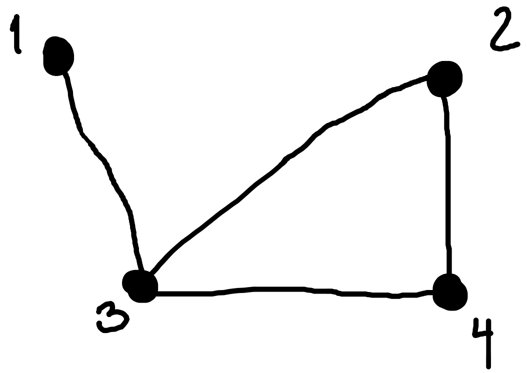
Введение в теорию графов

Опр **Граф $G\ (V, E)$** — множество вершин (*vertices, nodes, points*) V и множество ребер E, такое, что

$$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

является подмножеством множества двухэлементных подмножеств множества V (для неориентированного *Undirected* графа)

$G_n \rightarrow$



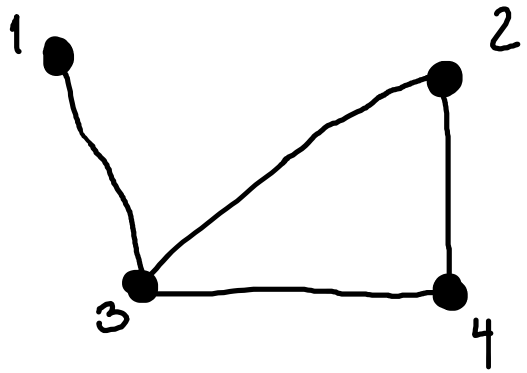
Введение в теорию графов

Опр **Граф $G\ (V, E)$** — множество вершин (*vertices, nodes, points*) V и множество ребер E, такое, что

$$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

является подмножеством множества двухэлементных подмножеств множества V (для неориентированного *Undirected* графа)

$G_n \to$



$n = 4 = |V|$

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

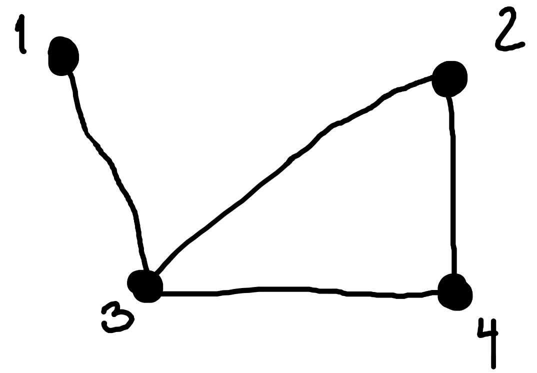
Введение в теорию графов

Опр **Граф $G\ (V, E)$** — множество вершин (*vertices, nodes, points*) V и множество ребер E, такое, что

$$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

является подмножеством множества двухэлементных подмножеств множества V (для неориентированного *Undirected* графа)

$G_n \rightarrow$



G_4

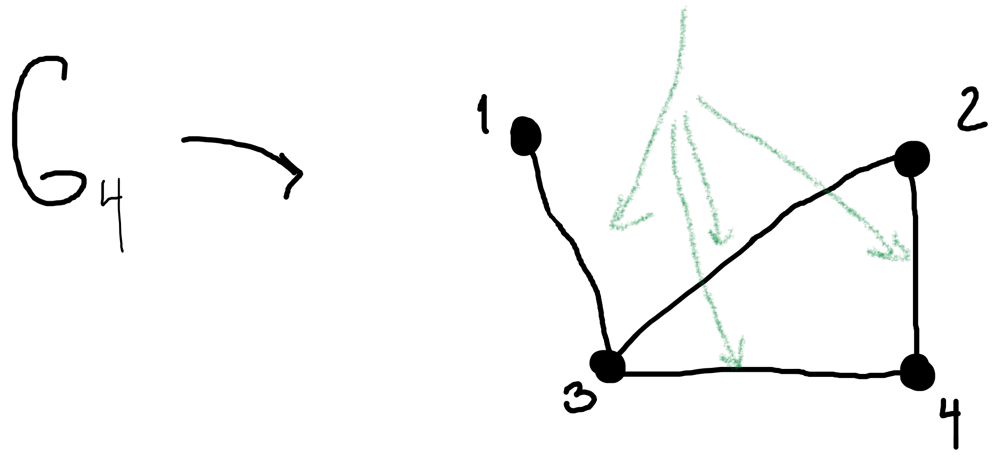
$n = 4 = |V|$

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{2,4\}, \{4,3\}\}$

$|E| = 4$

Опр **Ребро (*edge*)**— неупорядоченная пара $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ принадлежат V (для неориентированного графа)



$n = 4 = |V|$

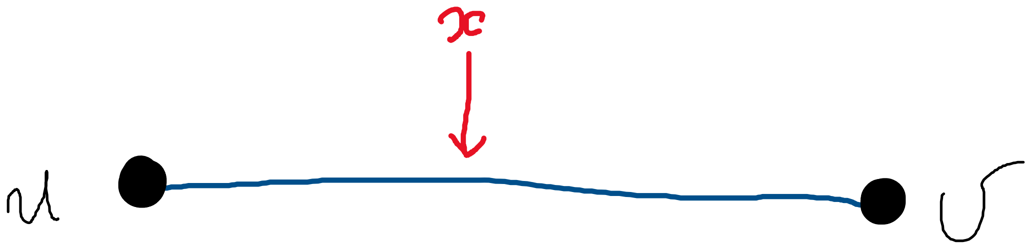
$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{2,4\}, \{4,3\}\}$

$|E| = 4$

Опр $\boldsymbol{x}$— ребро с концами u и v, $\{u, v\}$, тогда $\boldsymbol{x}$ **<u>инцидентно</u>** u и v и u и v <u>инцидентны</u> $\boldsymbol{x}$

(Incident)

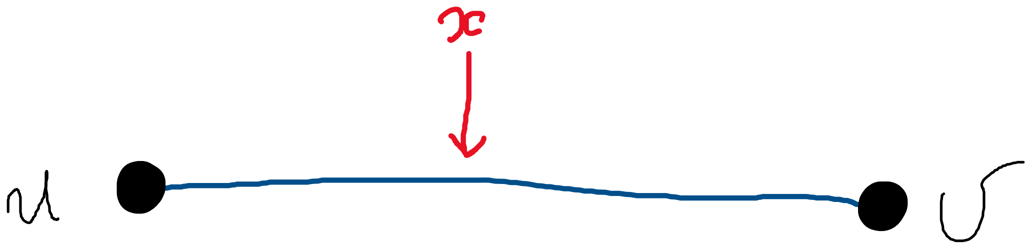


x – ребро

u, v – вершины

Опр x— ребро с концами u и v, $\{u, v\}$, тогда x **инцидентно** u и v и u и v инцидентны x

(Incident)



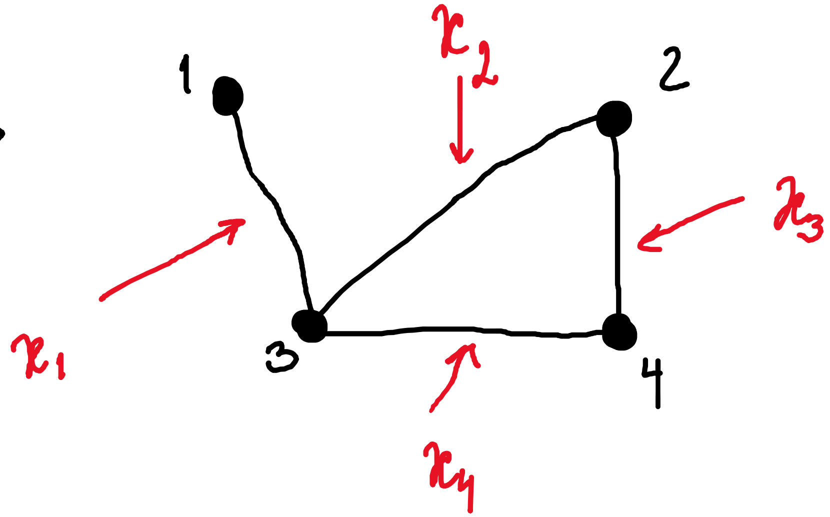
x – ребро

u, v - вершины

Ребро *инцидентно своим вершинам*

Вершины *инцидентны своему ребру*

Опр **Ребро (*edge*)**— неупорядоченная пара $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ принадлежат V (для неориентированного графа)

$G_4 \rightarrow$ 

$n = 4 = |V|$

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1,3\}, \{3,2\}, \{2,4\}, \{4,3\}\}$

$|E| = 4$

Опр $\boldsymbol{x}$— ребро с концами u и v, $\{u, v\}$, тогда $\boldsymbol{x}$ **инцидентно** u и v и u и v инцидентны $\boldsymbol{x}$

(Incident)

$x_1: \{1, 3\}$

$x_2: \{3, 2\}$

$x_3: \{2, 4\}$

$x_4: \{4, 3\}$

Adjacent – *СМЕЖНОСТЬ*

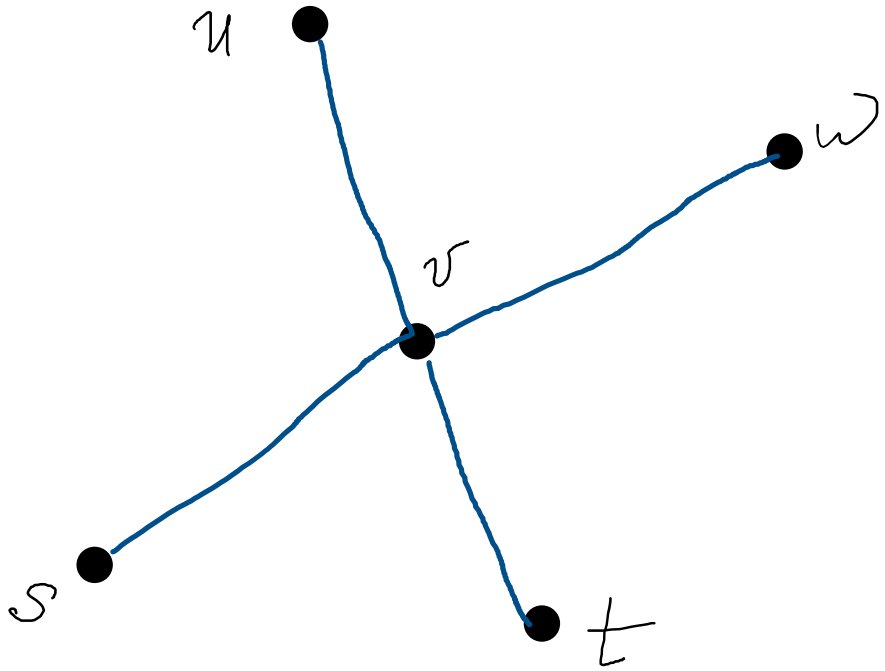
Опр вершины u и v называются **смежными** , если являются концами одного ребра

Опр ребра $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются **смежными**, если имеют общую вершину

Adjacent – СМЕЖНОСТЬ

Опр вершины u и v называются **смежными** , если являются концами одного ребра

Опр ребра $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются **смежными**, если имеют общую вершину



u, v

v, w

s, v

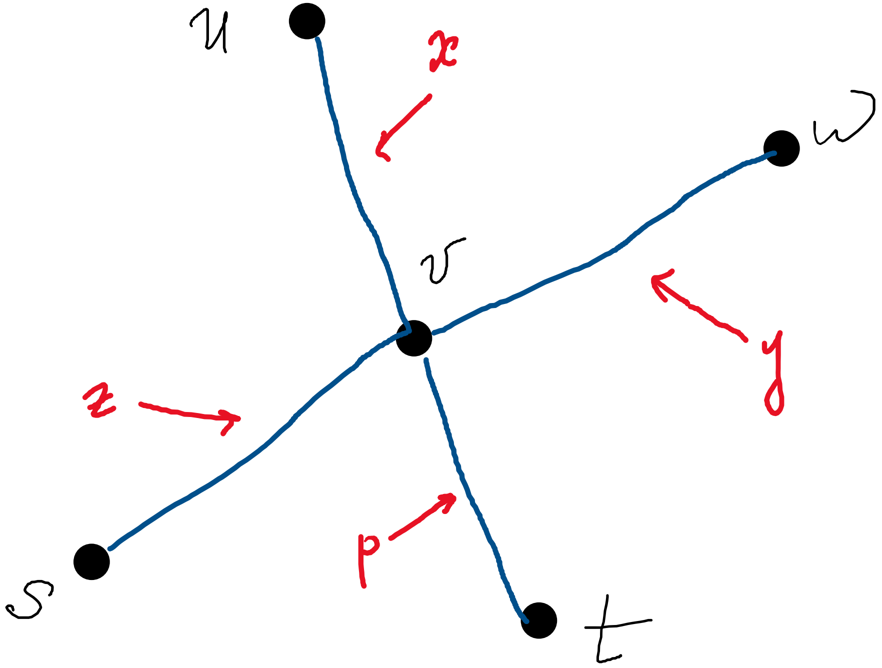
v, t

v – смежна со всеми

Adjacent – СМЕЖНОСТЬ

Опр вершины u и v называются **смежными** , если являются концами одного ребра

Опр ребра $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются **смежными**, если имеют общую вершину



$\underbrace{x, y, z, p}_{\text{все смежные}}$ — ребра

v — общая верш

Введение в теорию графов

Опр Граф $G\ (V, E)$ — множество вершин (*vertices, nodes, points*) V и множество ребер E, такое, что

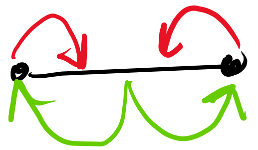
$$E \subseteq \{ \{u, v\} : u, v \in V \}$$

G_n

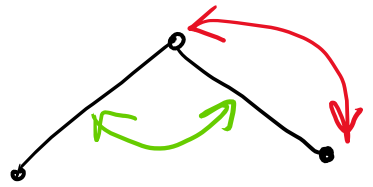
является подмножеством множества двухэлементных подмножеств множества V
(для неориентированного *Undirected* графа)

Опр Ребро (*edge*)— неупорядоченная пара $\{u, v\}$, где u и v принадлежат V (для неориентированного графа)

Опр x — ребро с концами u и v, $\{u, v\}$, тогда x инцидентно u и v и u и v инцидентны x
Incident



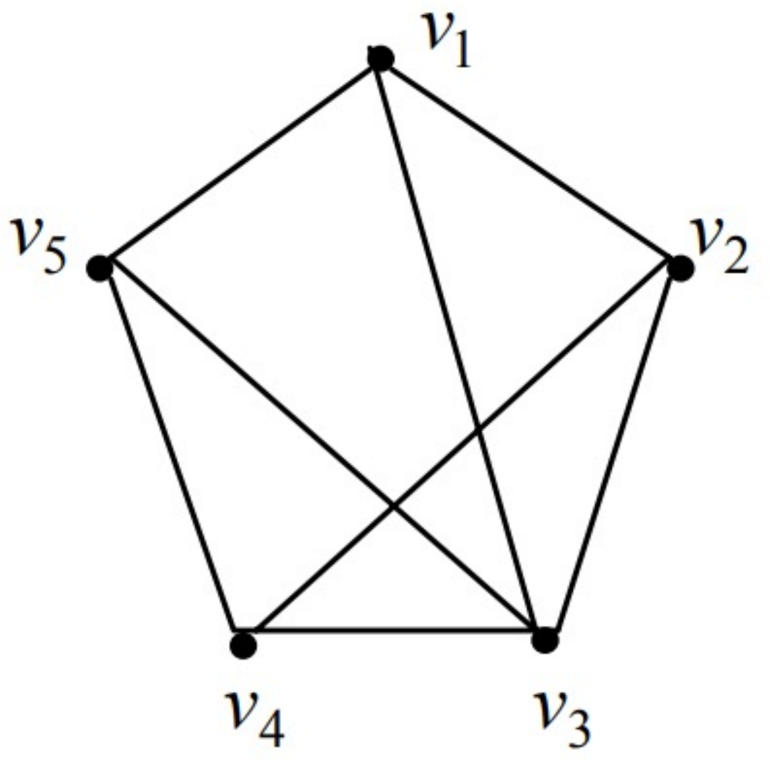
Опр вершины u и v называются смежными, если являются концами одного ребра
ребра x и y называются смежными, если имеют общую вершину
Adjacent



Развиваем понятия

Основные определения

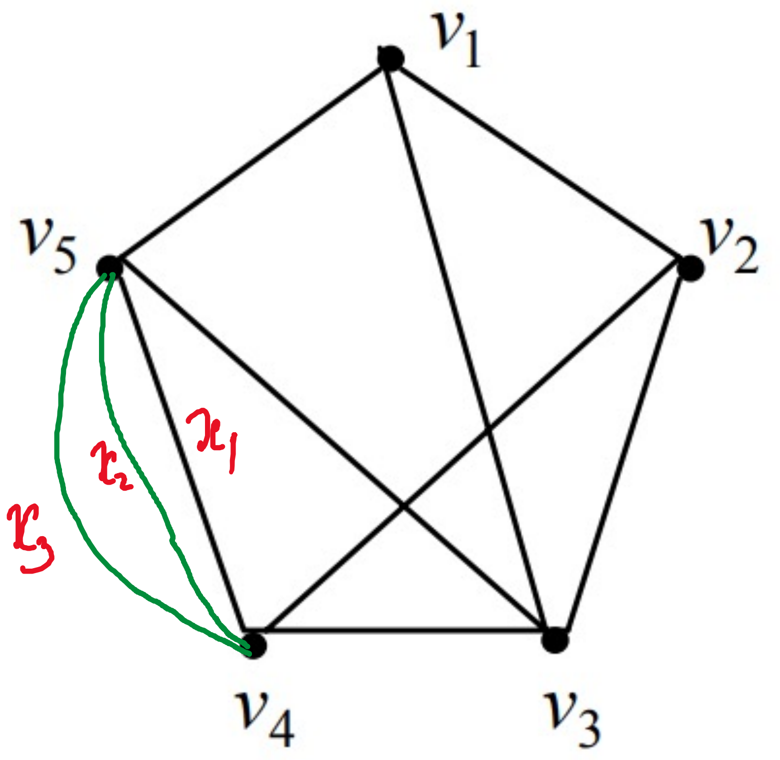
Опр **<u>Кратные ребра</u>** (параллельные) *Multiple edges*— несколько ребер, соединяющие одни и те же вершины



Основные определения

Опр **Кратные ребра** (параллельные) *Multiple edges*— несколько ребер, соединяющие одни и те же вершины

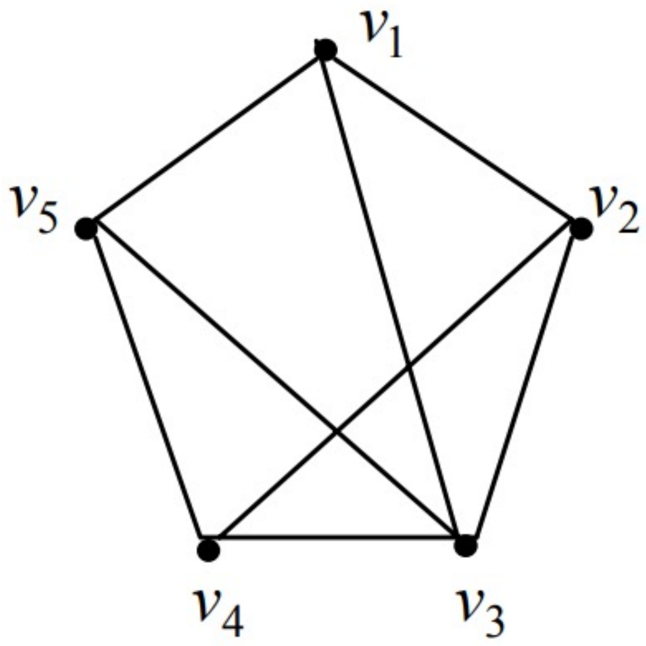
$\{v_5, v_4\} \to x_1, x_2, x_3$



Основные определения

Опр **<u>Петля</u>** *Loop*— ребро, соединяющее вершину саму с собой

(aka из б/ь)



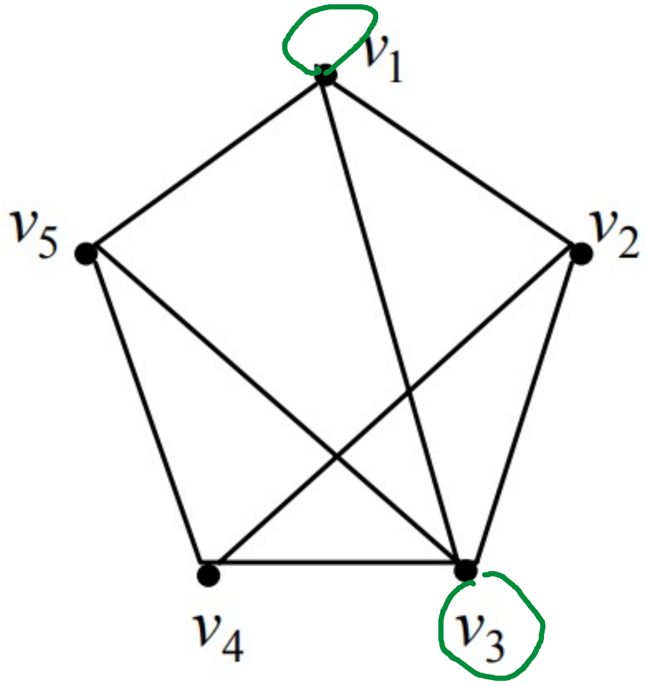
Основные определения

Опр **<u>Петля</u>** *Loop* — ребро, соединяющее вершину саму с собой

$\{v_1, v_1\}$

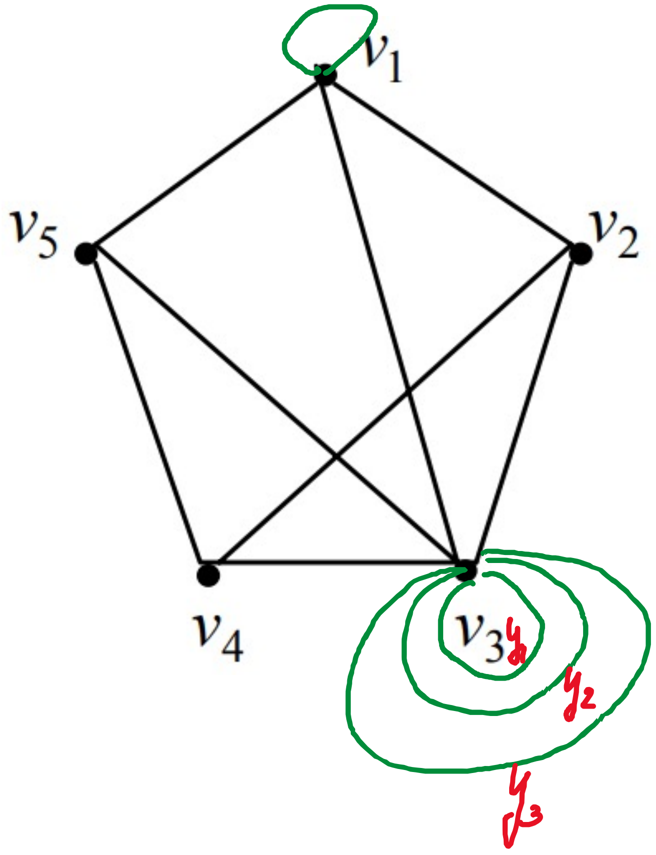
$\{v_3, v_3\}$

петли



Основные определения

Опр **<u>Петля</u>** *Loop* — ребро, соединяющее вершину саму с собой



$\{v_1, v_1\}$

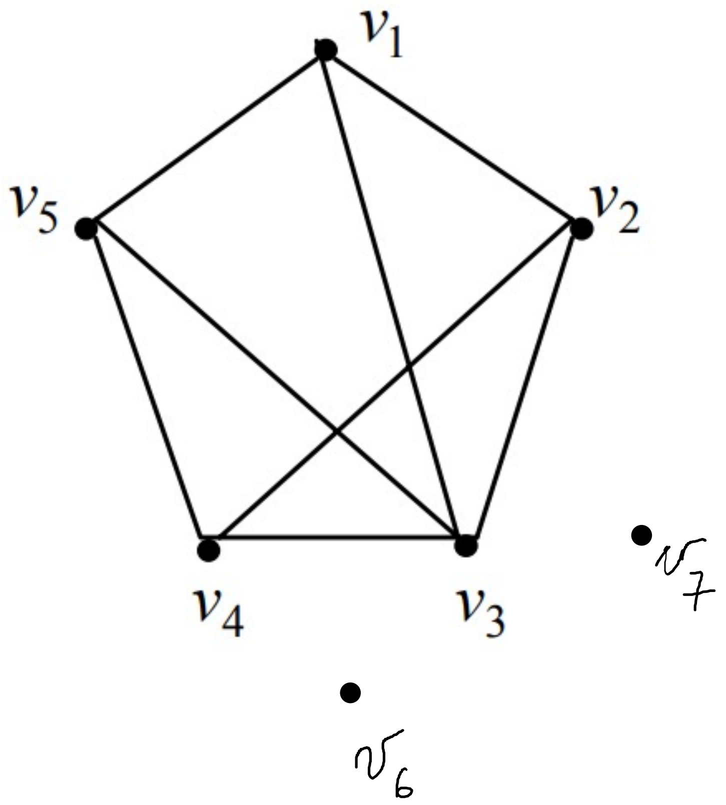
$\{v_3, v_3\}$

петли

$$\underbrace{y_1, y_2, y_3}_{\text{кратные петли!}}$$

Основные определения

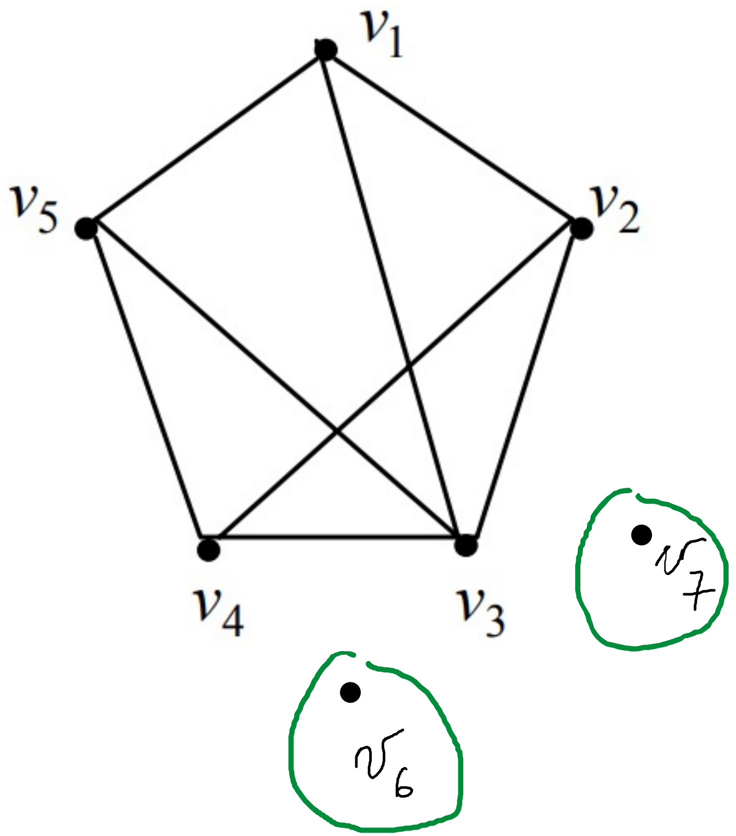
Опр **Изолированная** *Isolated* вершина — вершина без петель и она не является концом ни одного из ребер



Основные определения

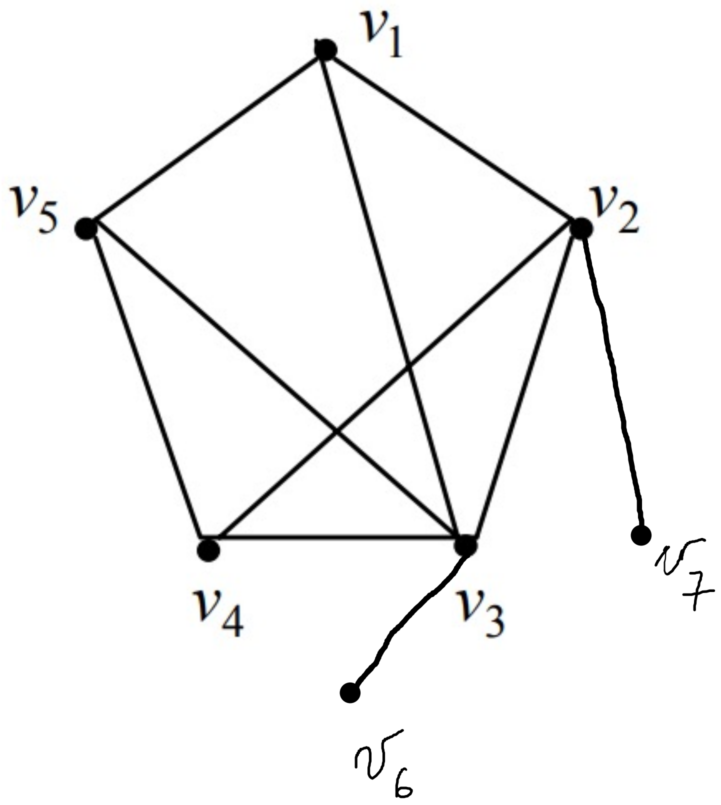
Опр **Изолированная** *Isolated* вершина — вершина без петель и она не является концом ни одного из ребер

v_6 и v_7 — изолир-ые!



Основные определения

Опр **(Концевая) Висячая** *Pendant* **вершина** — вершина, в которую вдет только одно ребро, которое в свою очередь называется **висячим**

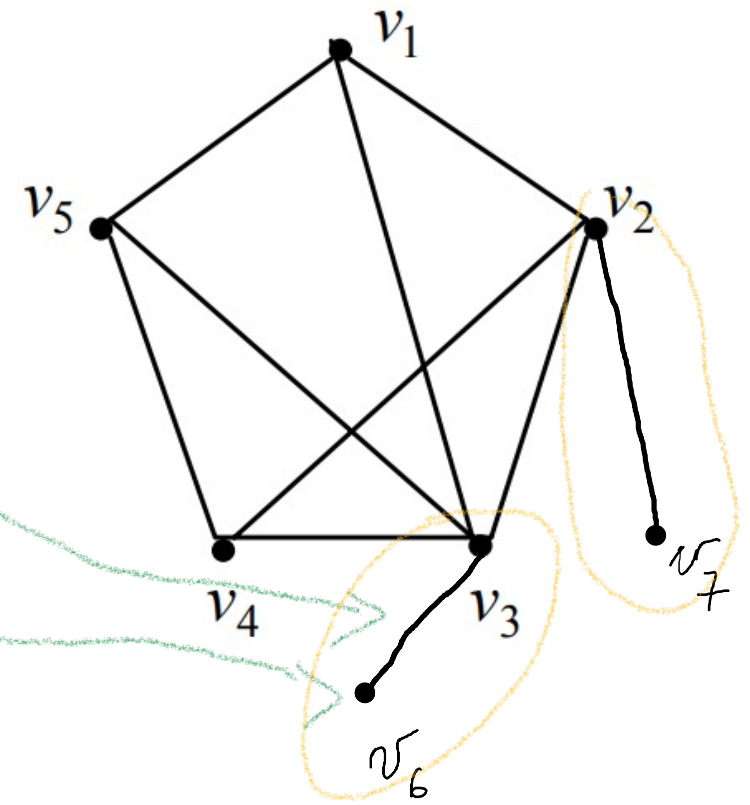


Основные определения

Опр **(Концевая) Висячая** *Pendant* **вершина** — вершина, в которую вдет только одно ребро, которое в свою очередь называется **висячим**

$\{v_3, v_6\}$ – вис. ребро $\Rightarrow$ v_6 – вис.

$\{v_2, v_7\}$ – вис. ребро $\Rightarrow$ v_7 – вис.



Основные определения

Опр Кратные ребра (параллельные) *Multiple edges*— несколько ребер, соединяющие одни и те же вершины

$(v, v_5), (v_1, v_5)$

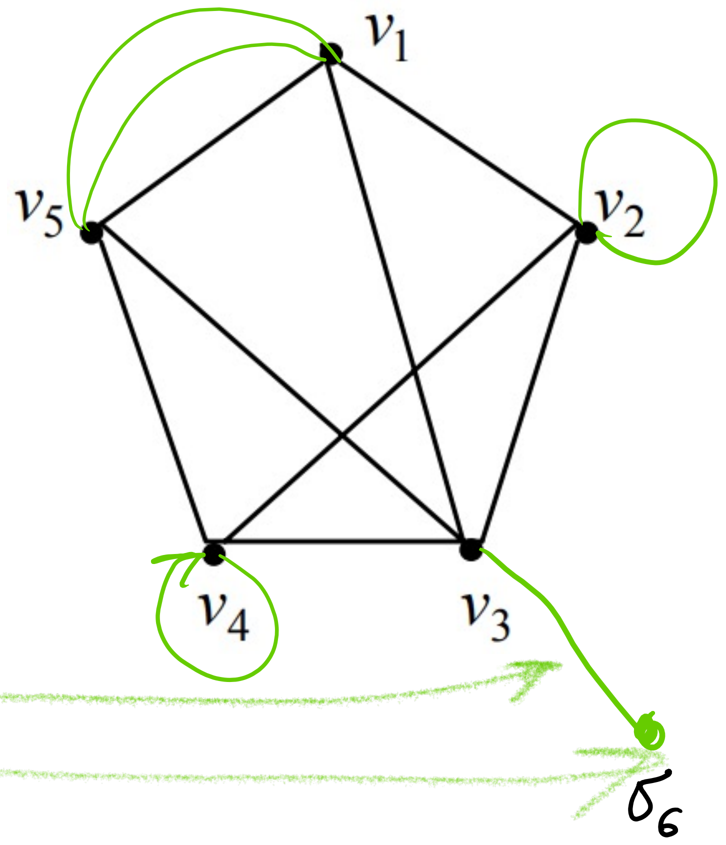
Опр Петля *Loop*— ребро, соединяющее вершину саму с собой

aRa

Концевая

Опр Висячая *Pendant* вершина — вершина, в которую вдет только одно ребро, которое в свою очередь называется висячим

Опр Изолированная *Isolated* вершина — вершина без петель и она не является концом ни одного из ребер

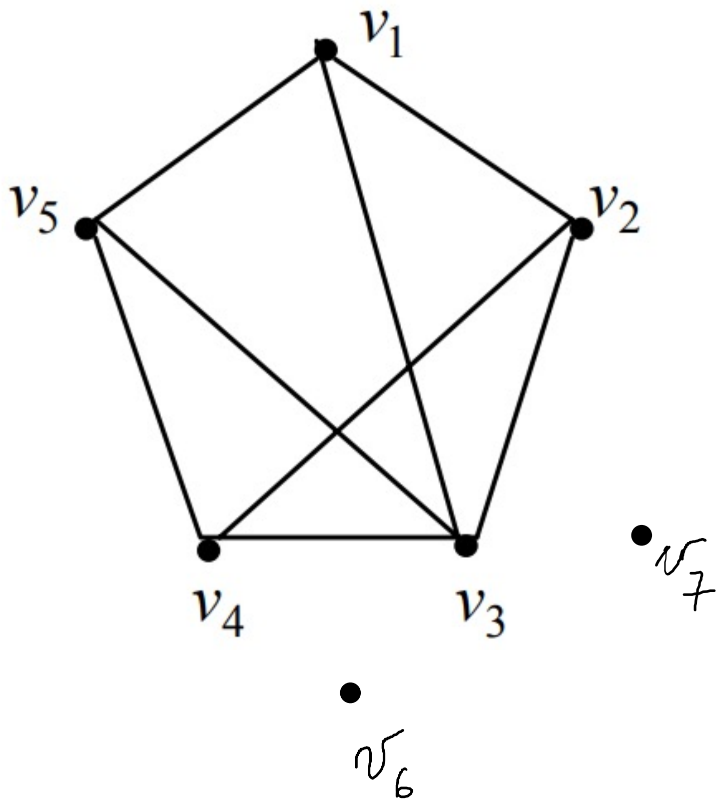


$\cdot\ v_7$

Классификация графов
(часть 1)

Основные определения

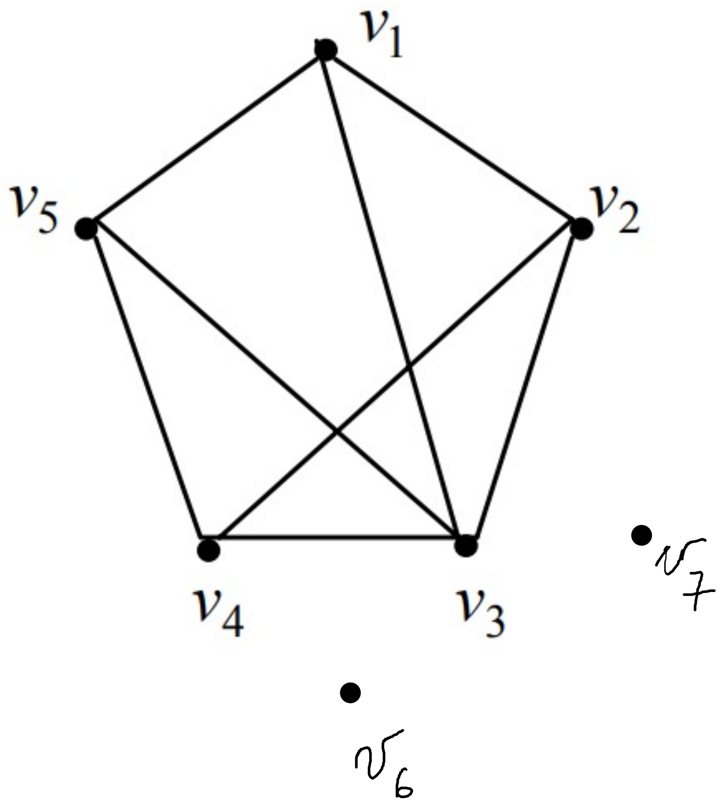
Опр Простой граф *Graph* — граф без параллельных ребер и петель



Основные определения

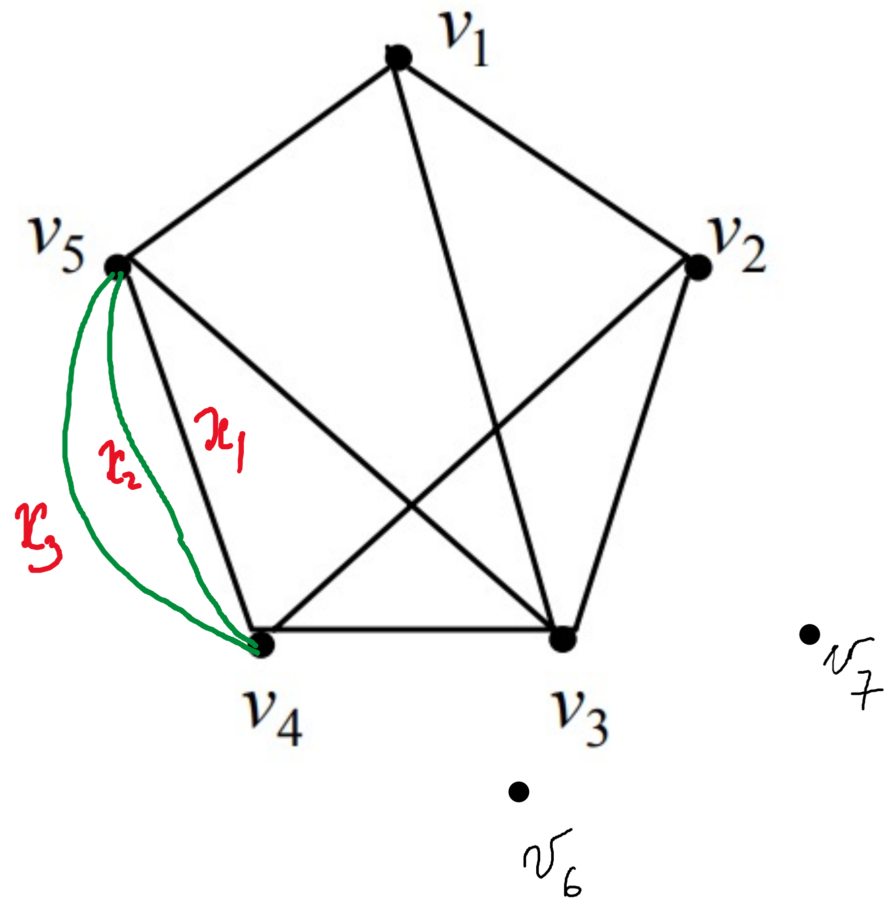
Опр **Простой граф** *Graph* — граф без параллельных ребер и петель

$$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V \text{ и } u \neq v\}$$



Основные определения

Опр **Мультиграф** *Multigraph* — граф с параллельными ребрами

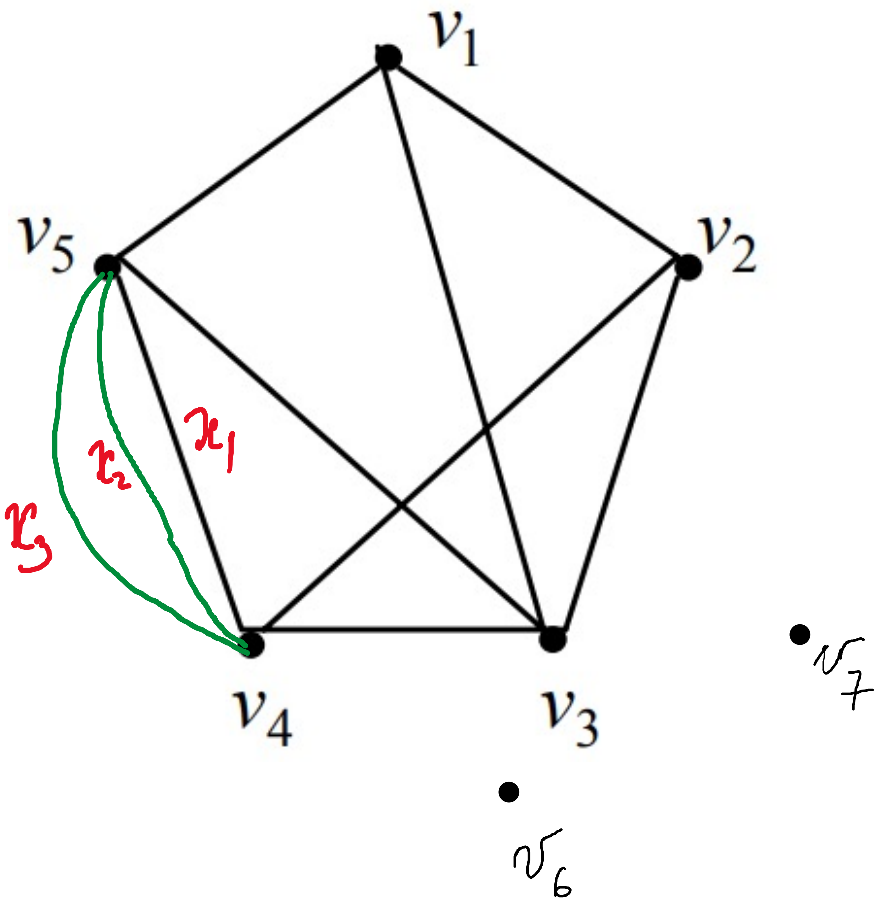


Основные определения

Опр <u>**Мультиграф**</u> *Multigraph* — граф с параллельными ребрами

E – мультимножество, допускает повтор элементов

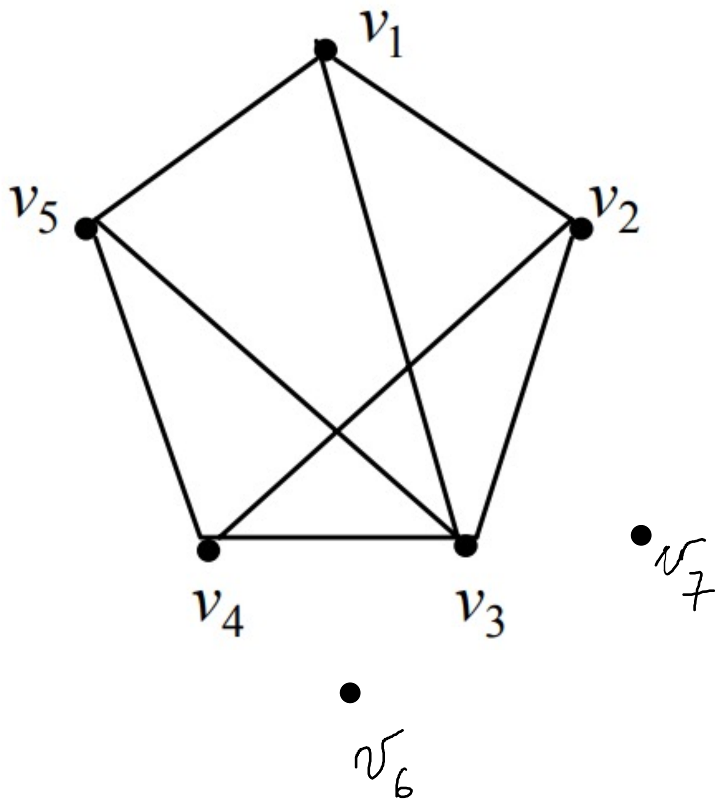
$x_1, x_2, x_3 = \{v_5, v_4\}$! из E



Основные определения

Опр **<u>Псевдограф</u>** *Pseudograph*— граф, который может содержать:

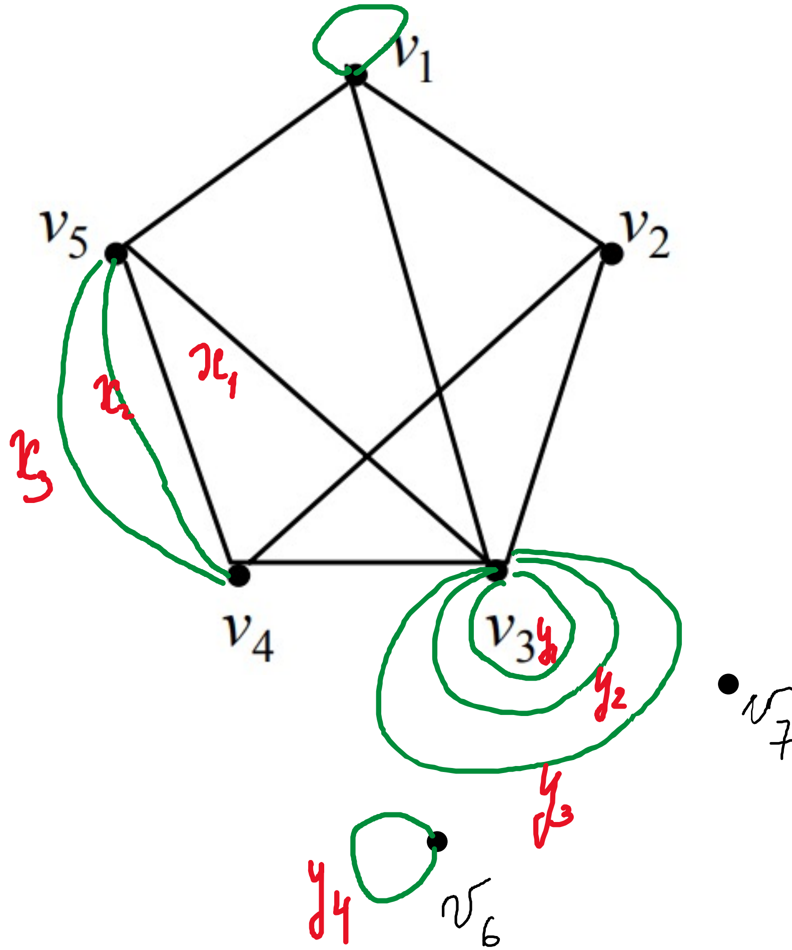
- петли
- и/или параллельные ребра



Основные определения

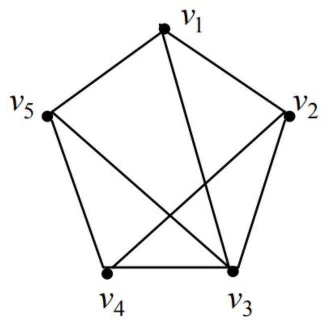
Опр **<u>Псевдограф</u>** *Pseudograph*— граф, который может содержать:

- петли y_1, y_2, y_3, y_4 кратные
- и/или параллельные ребра x_1, x_2, x_3



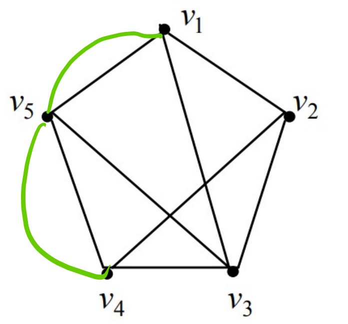
Основные определения

Опр Простой граф *Graph* — граф без параллельных ребер и петель



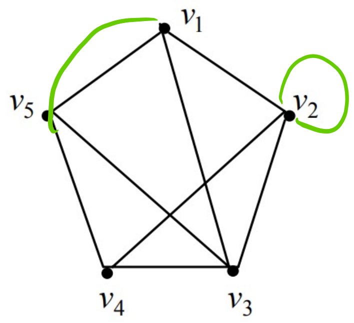
$$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V \text{ и } u \neq v\}$$

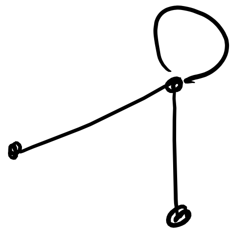
Опр Мультиграф *Multigraph* — граф с параллельными ребрами



E – мультимножество, допускает повтор элементов

Опр Псевдограф *Pseudograph*— граф, который может содержать петли и/или параллельные ребра

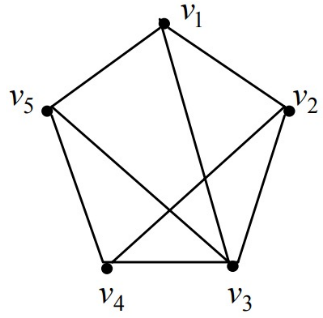




Основные определения

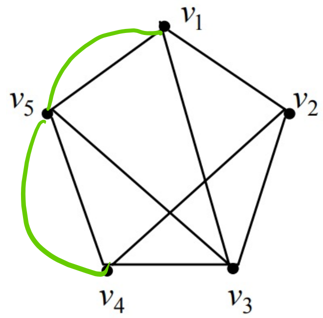
(1) ≤ (2) ≤ (3)

(1) **Опр** Простой граф *Graph* — граф без параллельных ребер и петель



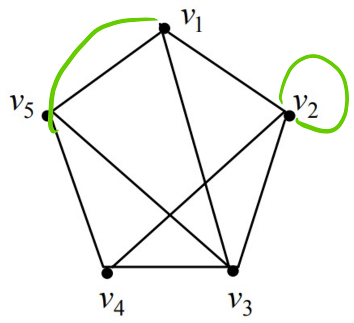
$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V$ и $u \neq v\}$

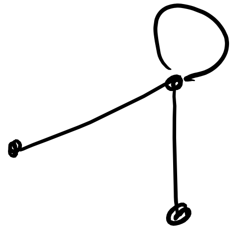
(2) **Опр** Мультиграф *Multigraph* — граф с параллельными ребрами



E – мультимножество, допускает повтор элементов

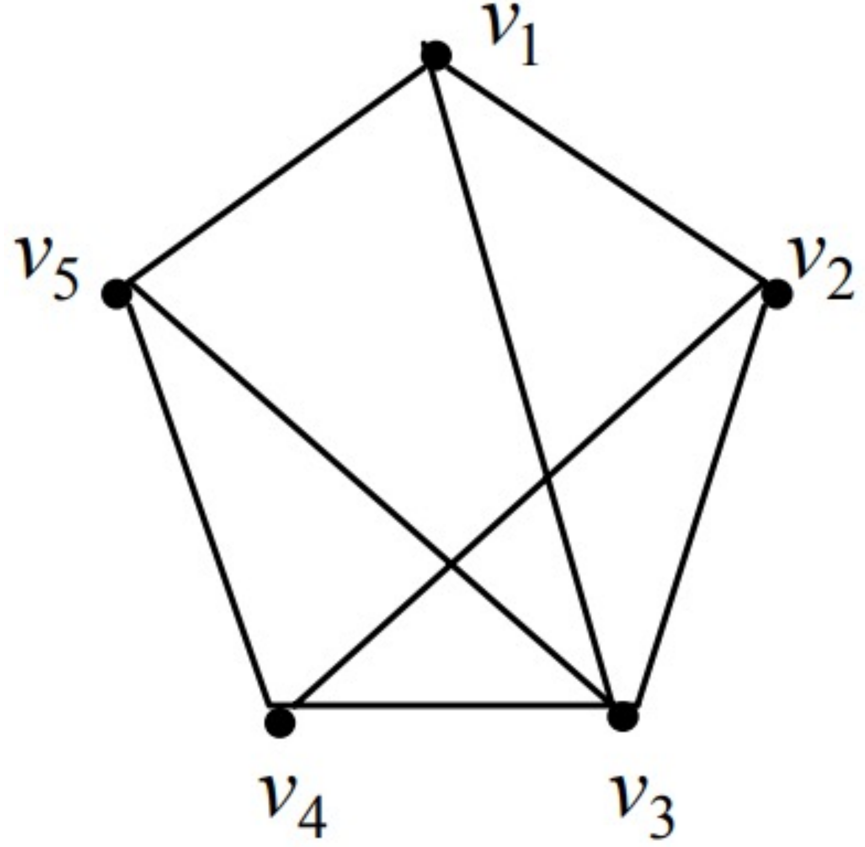
(3) **Опр** Псевдограф *Pseudograph*— граф, который может содержать петли и/или параллельные ребра





Ориентированный граф

Неориентированный
граф

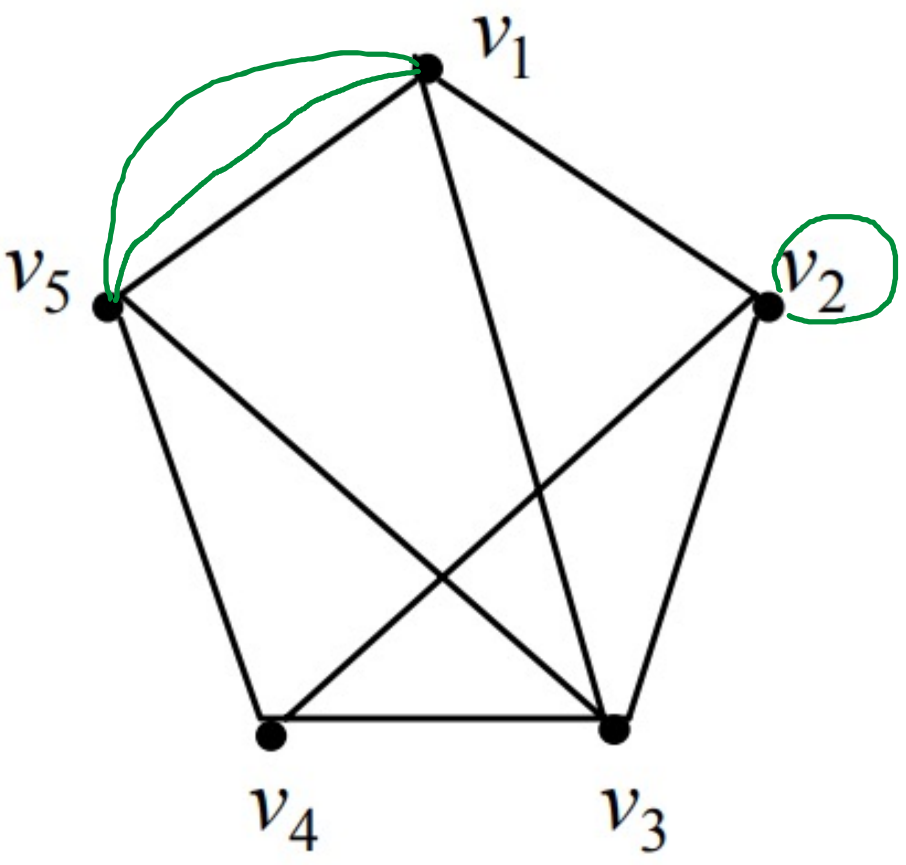


! ребра !

$\{v_5, v_4\}$ $=$
$\{v_4, v_5\}$

Простой Мульти Псевдо

Неориентированный граф



! ребра !

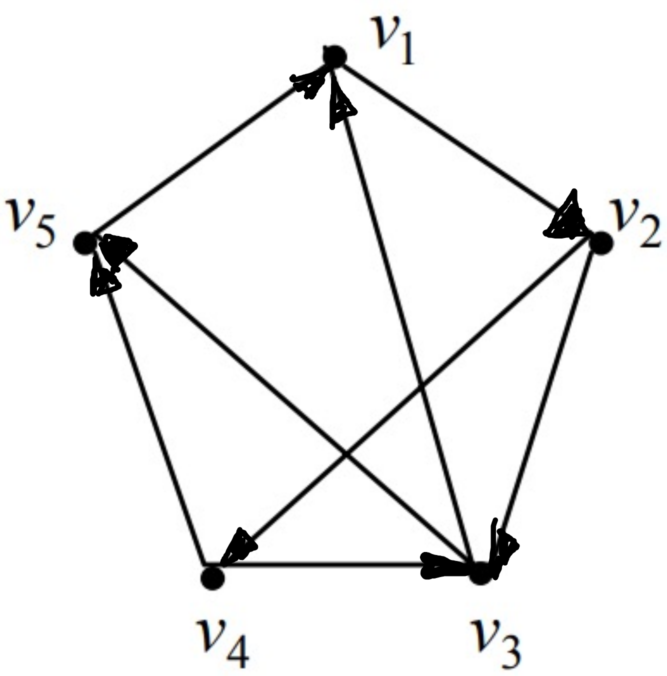
$\{v_5, v_4\} = \{v_4, v_5\}$

Ориентированный граф

*Directed graph or **Digraph***

Опр **Ориентированный граф** $G\ (V, E)$ — множество вершин V и ориентированных ребер E

$E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\}$ $\quad E \subseteq V \times V$



Ориентированный граф

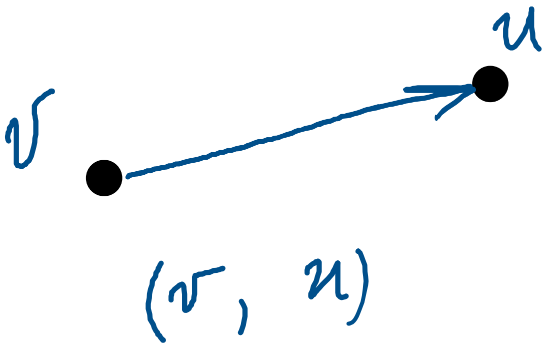
*Directed graph or **Digraph***

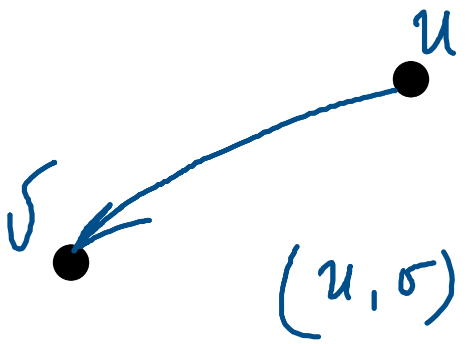
Опр <u>**Ориентированный граф** $G\ (V, E)$</u> — множество вершин $\underline{V}$ и ориентированных ребер E

$$E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} \qquad E \subseteq V \times V$$

Опр <u>**Ориентированное ребро (дуга)**</u> — упорядоченная пара (u, v), где u и v принадлежат V

*directed edges, directed links, directed lines, arrows or **arcs***



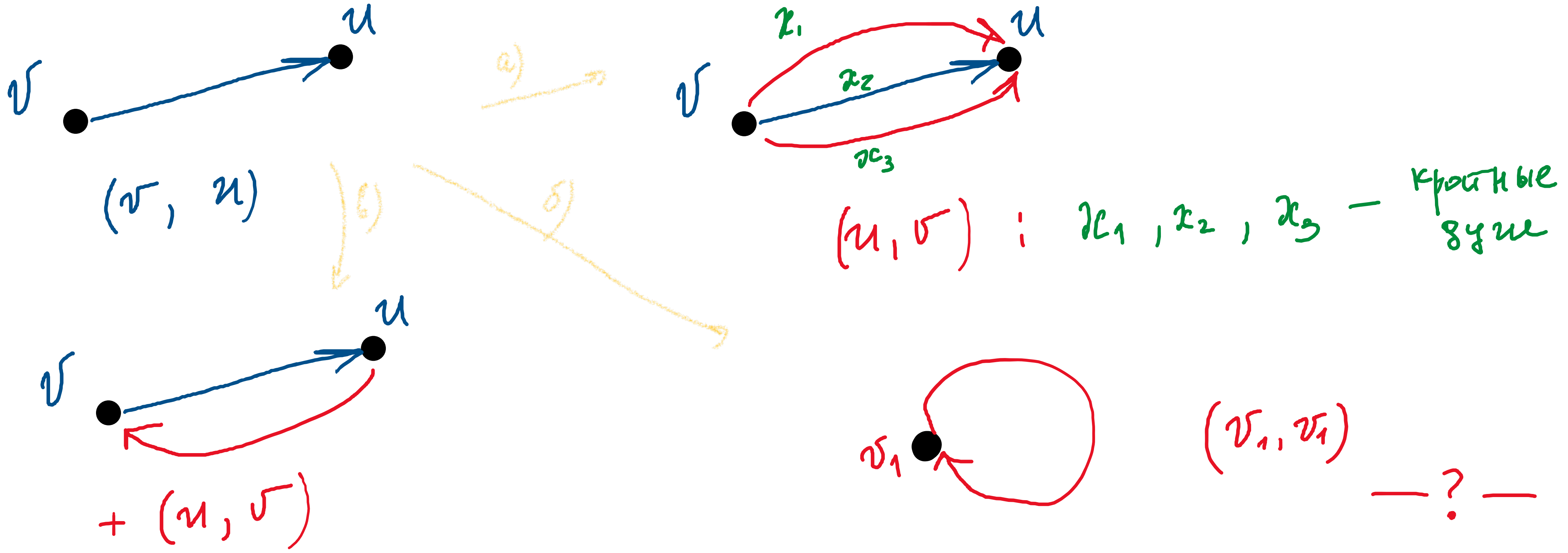


Ориентированный граф

Directed graph or ***Digraph***

Опр **<u>Ориентированное ребро (дуга)</u>** — упорядоченная пара (u, v), где u и v принадлежат V

directed edges, directed links, directed lines, arrows or ***arcs***



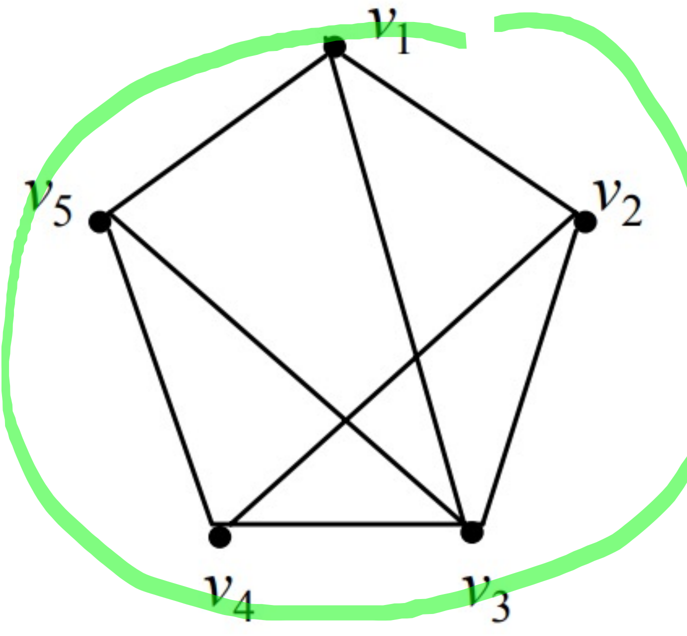
Ориентированный граф

*Directed graph or **Digraph***

Опр <u>**Ориентированный граф** $G\ (V, E)$</u> — множество вершин V и ориентированных ребер E

$$E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} \qquad E \subseteq V \times V$$

Опр <u>**Ориентированное ребро (дуга)**</u> —
упорядоченная пара (u, v), где u и v принадлежат V
directed edges, directed links, directed lines, arrows or ***arcs***

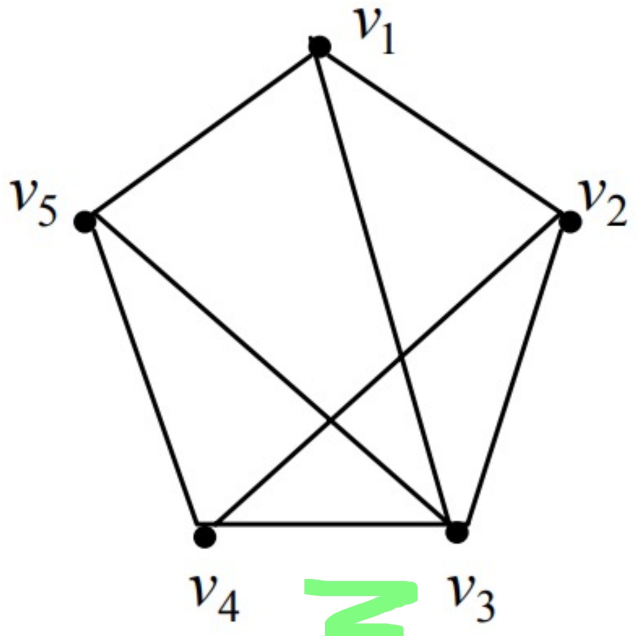


?

Ориентированный граф

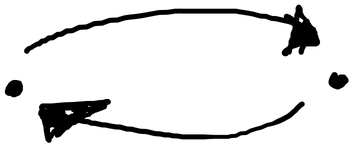
*Directed graph or **Digraph***

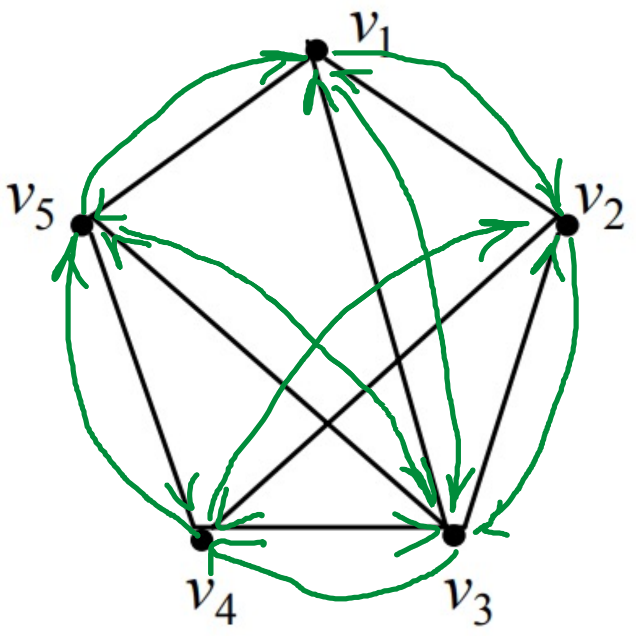
Опр **<u>Ориентированный граф $G\ (V, E)$</u>** — множество вершин V и ориентированных ребер E



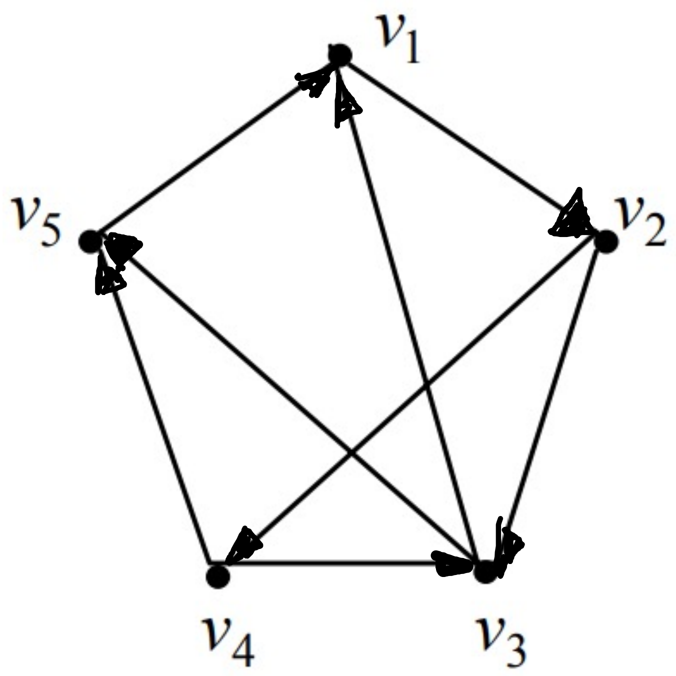
$$E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} \qquad E \subseteq V \times V$$

ребро =

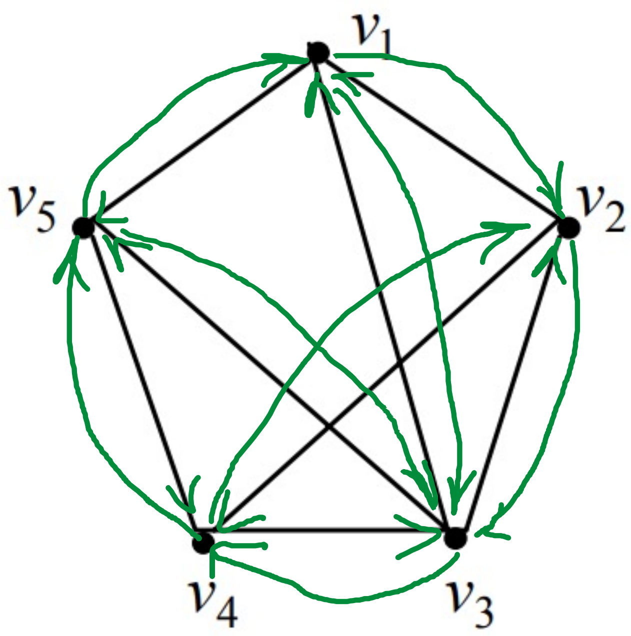




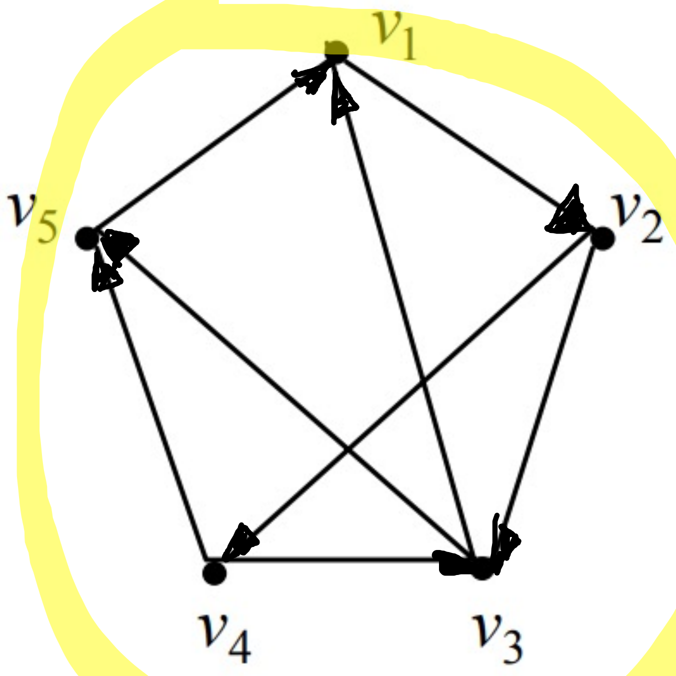
Направленный граф



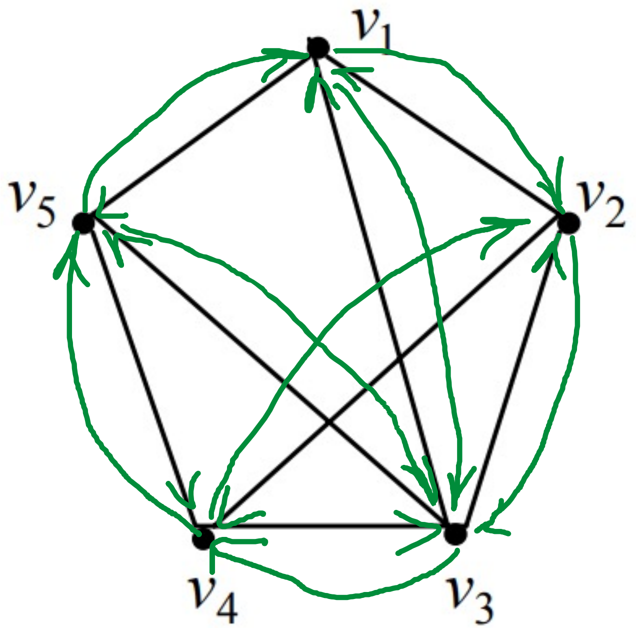
vs



Направленный граф



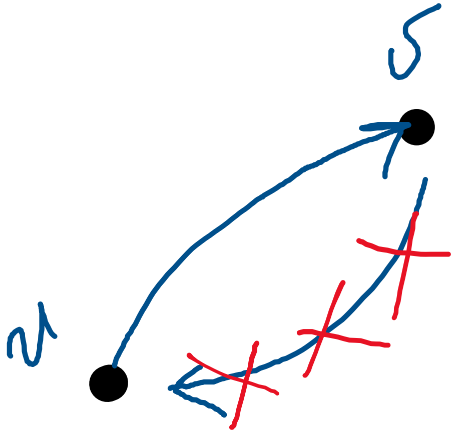
vs

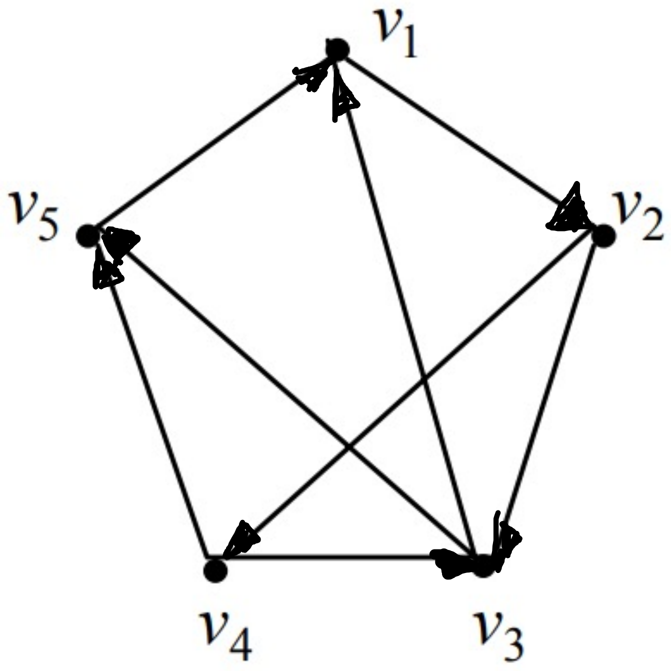


Ориентированный граф

Directed graph or ***Digraph***

Опр **Направленный граф** — граф без симметричных (u, v) и (v, u) пар ориентированных ребер

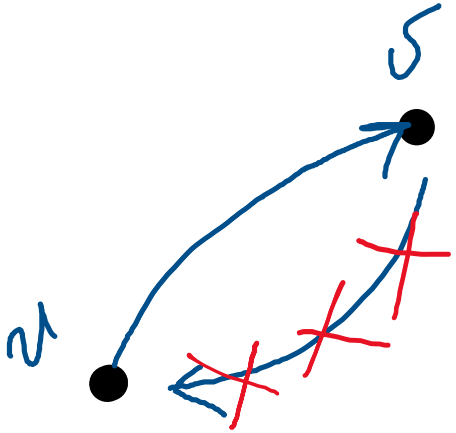




Ориентированный граф

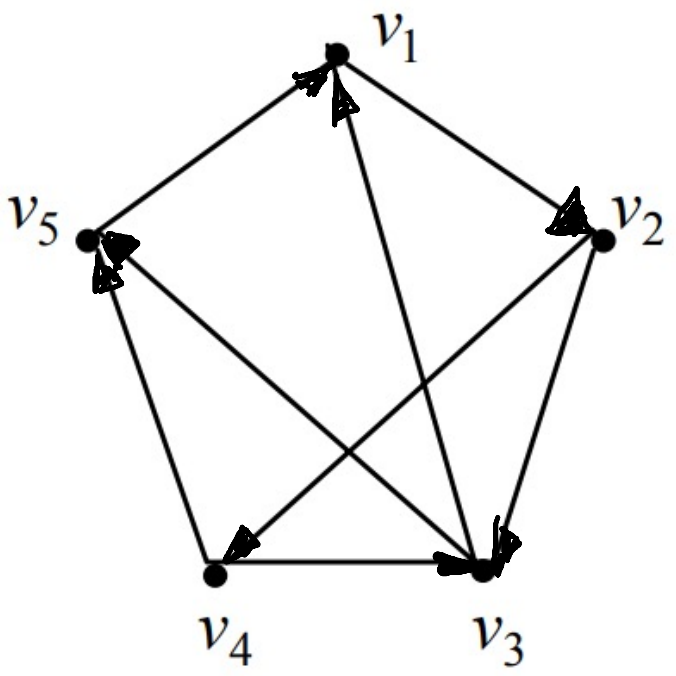
Directed graph or ***Digraph***

Опр **Направленный граф** — граф без симметричных (u, v) и (v, u) пар ориентированных ребер



Если $\exists\ (u, v) \Rightarrow$

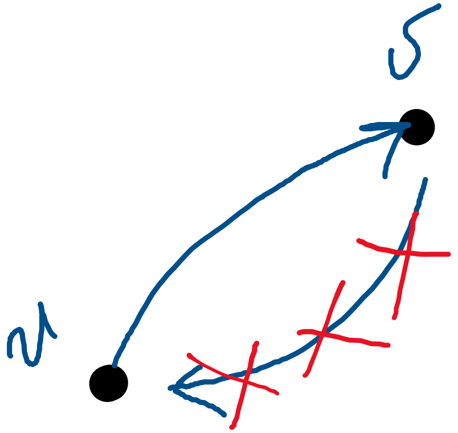
$\Rightarrow \nexists\ (v, u)$



Ориентированный граф

Directed graph or ***Digraph***

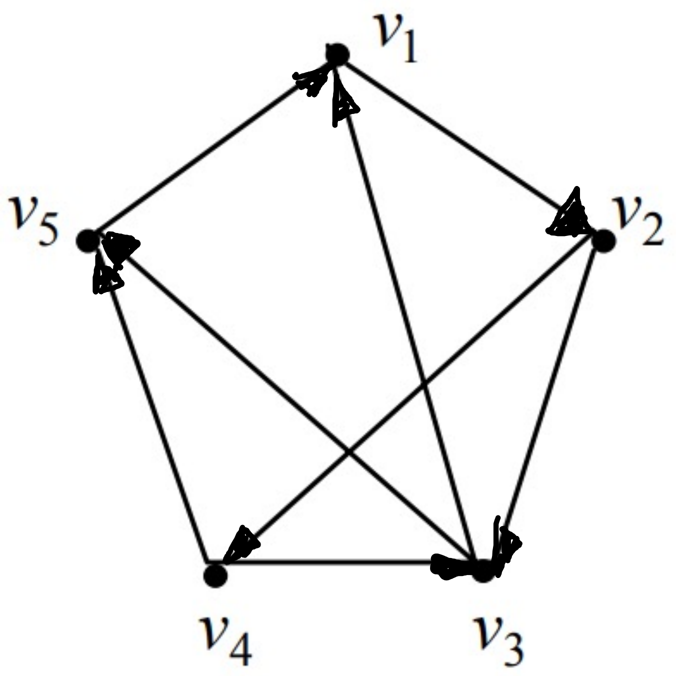
Опр **<u>Направленный граф</u>** — граф без симметричных (u, v) и (v, u) пар ориентированных ребер



Если $\exists\ (u, v) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \nexists\ (v, u)$

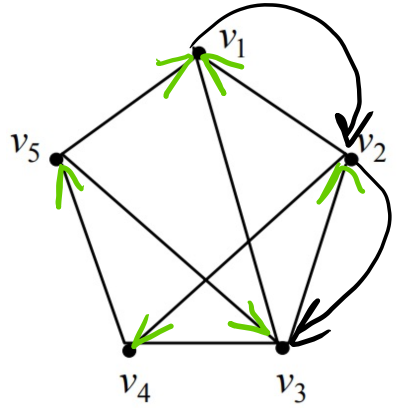
(как асимметр. б/о)



Ориентированный граф

*Directed graph or **Digraph***

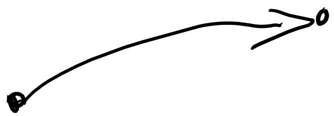
Опр Ориентированный граф $G\ (V, E)$ — множество вершин V и ориентированных ребер E



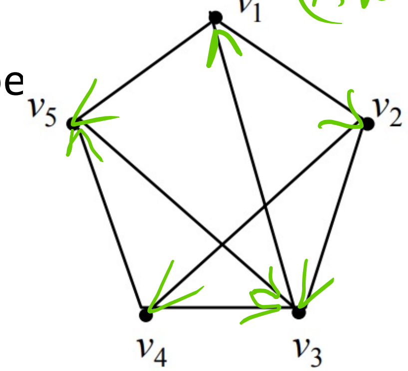
$$E \subseteq \{(u,v) : u, v \in V\} \qquad E \subseteq V \times V$$

Опр Ориентированное ребро (дуга) — упорядоченная пара (u, v), где u и v принадлежат V

directed edges, directed links, directed lines, arrows or arcs



Асим (Антисим)



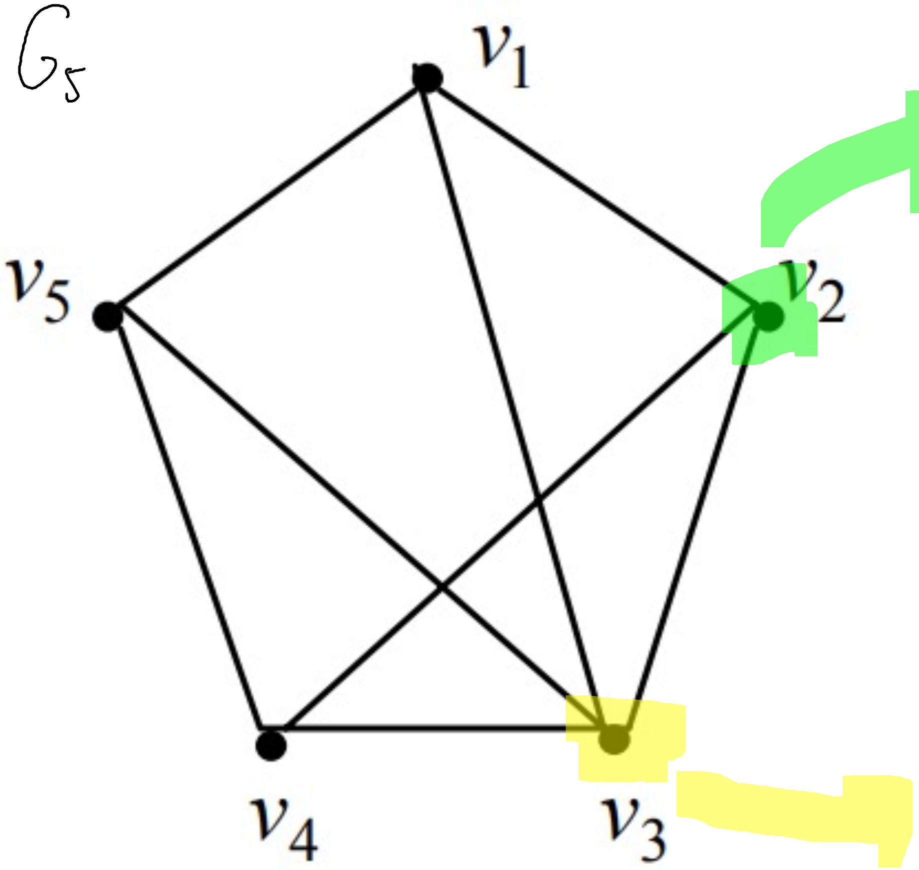
Опр Направленный граф — граф без симметричных(u, v) и (v, u) пар ориентированных ребе

Асим.

Степень вершины
и
леммы

Степень вершины

Опр **<u>Степень</u>** *Degree* вершины в неориентированном графе $G(V,E)$
<u>deg</u> — число ребер, инцидентных этой вершине

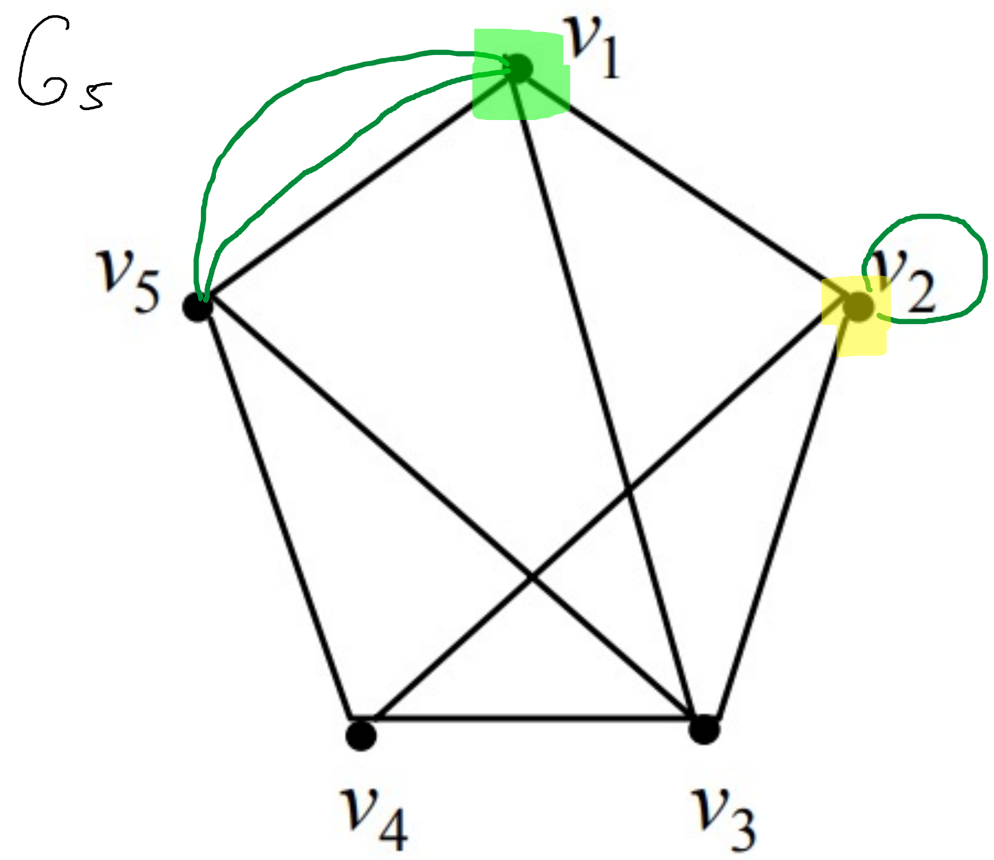


$\deg v_2 = 3$

$\deg v_3 = 4$

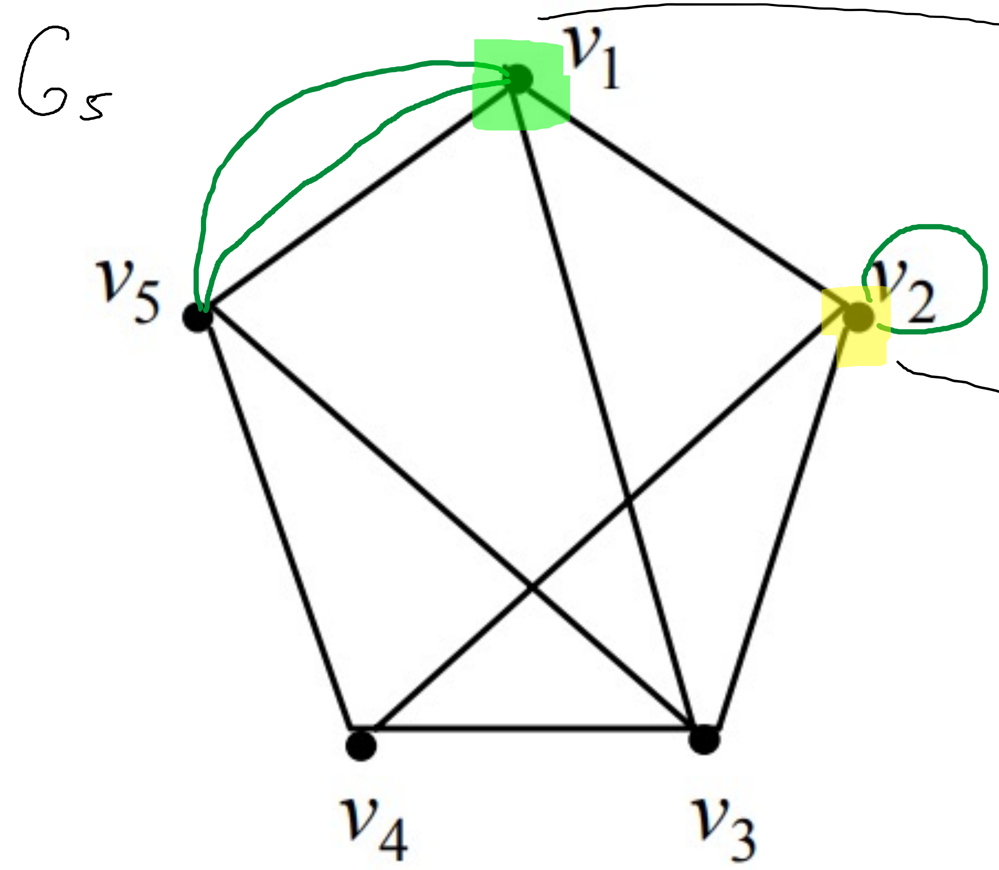
Степень вершины

Опр **Степень** *Degree* вершины в неориентированном графе $G(V, E)$
deg — число ребер, инцидентных этой вершине



Степень вершины

Опр **Степень** *Degree* вершины в неориентированном графе $G(V, E)$
deg — число ребер, инцидентных этой вершине

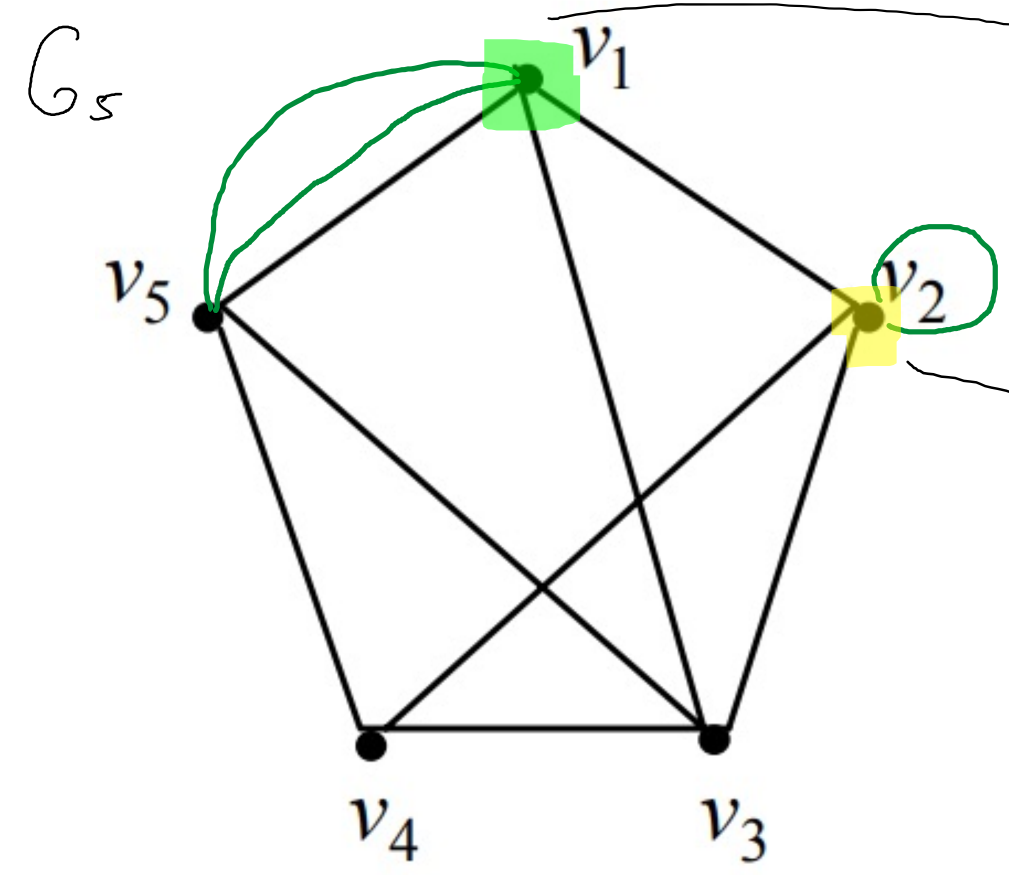


$\deg v_1 = 3$

$\deg v_2 = 5$

Степень вершины

Опр **<u>Степень</u>** *Degree* вершины в неориентированном графе $G(V, E)$
<u>deg</u> — число ребер, инцидентных этой вершине



$\deg v_1 = 3$

$\deg v_2 = 5$

+2 при подсчете

Степень вершины ОРИЕНТИРОВАННОГО графа

Опр **<u>Степень входа вершины </u>** —

— сколько дуг входит в вершину

Indegree

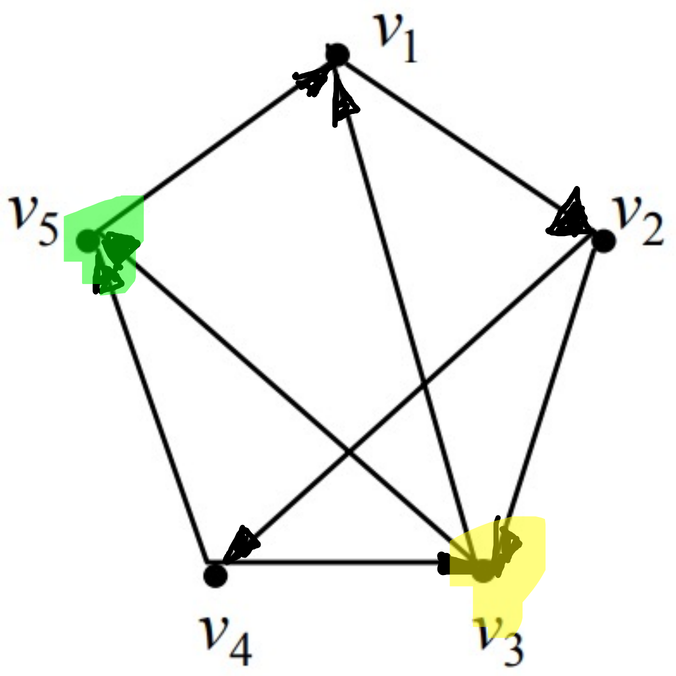
deg^-

Опр **<u>Степень исхода вершины </u>** —

выходит из вершины

Outdegree

deg^+



Степень вершины ОРИЕНТИРОВАННОГО графа

Опр **Степень входа вершины** —

— сколько дуг входит в вершину

Indegree

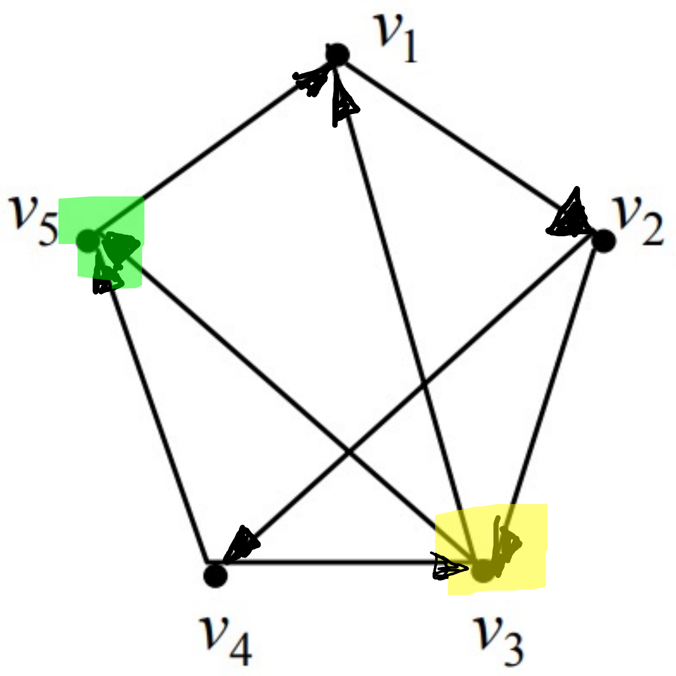
Опр **Степень исхода вершины** —

выходит из вершины

Outdegree

$\deg^-$

$\deg^+$



$\deg^- v_5 = 2$

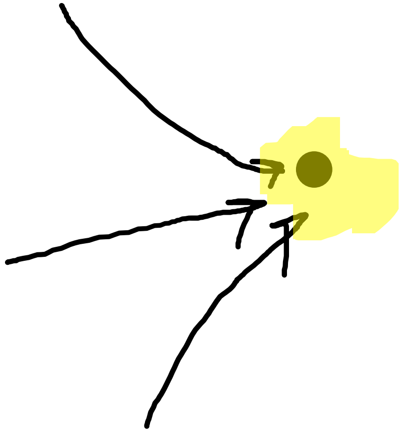
$\deg^+ v_5 = 1$

$\deg^- v_3 = 2$

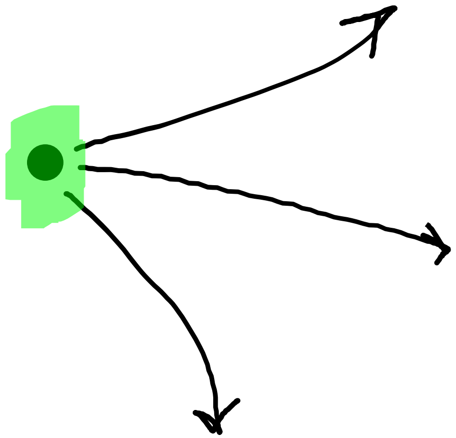
$\deg^+ v_3 = 2$

СТОК и ИСТОК

$\deg^- v_1 = 3$
$\deg^+ v_1 = 0$
сток (sink)

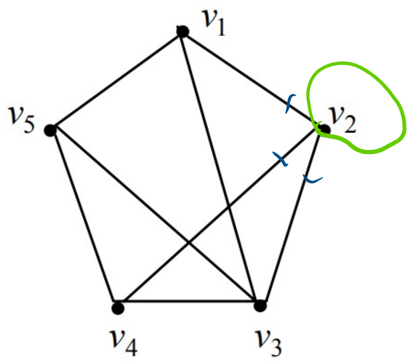


$\deg^- v_2 = 0$
$\deg^+ v_2 = 3$
исток (source)



Степень вершины

Опр Степень *Degree* вершины в неориентированном графе $G(V, E)$ $\deg v_i$ — число ребер, инцидентных этой вершине



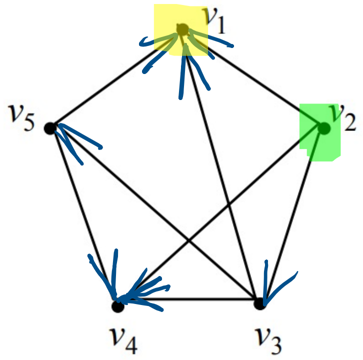
$\deg v_2 = 3$

$\deg v_2 = 5$!

$\deg v_3 = 4$

Опр Степень входа вершины — $\deg^- v_i$ — сколько дуг входит в вершину *Indegree* $\deg^- v_3 = 1$

Опр Степень исхода вершины — $\deg^+ v_i$ — сколько дуг выходит из вершины *Outdegree* $\deg^+ v_3 = 3$



$\deg^- v_1 = 3$
$\deg^+ v_1 = 0$ сток (sink)

$\deg^- v_2 = 0$
$\deg^+ v_2 = 3$ исток (source)

Лемма о рукопожатиях

Handshaking lemma

Лемма (о рукопожатиях)

1. Неориентированный граф

Сумма степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу ребер графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$

Лемма о рукопожатиях

Handshaking lemma

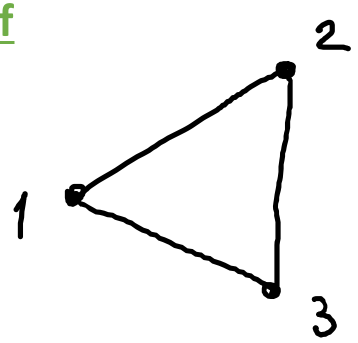
Лемма (о рукопожатиях)

1. Неориентированный граф

Сумма степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу ребер графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$

Proof



$$\sum \deg v_i = 2|E|$$

Лемма о рукопожатиях

Handshaking lemma

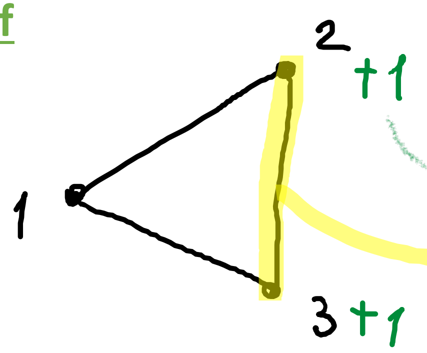
Лемма (о рукопожатиях)

1. Неориентированный граф

Сумма степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу ребер графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$

Proof



$$\sum \deg v_i = 2|E|$$

+2

+1

Лемма о рукопожатиях

Handshaking lemma

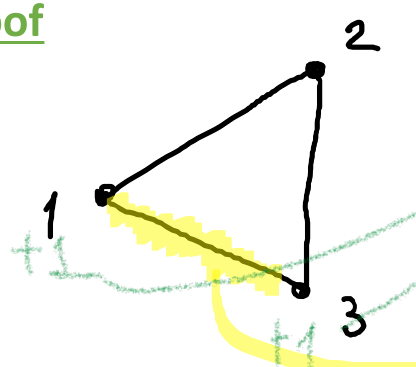
Лемма (о рукопожатиях)

1. Неориентированный граф

Сумма степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу ребер графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$

Proof



$$\sum \deg v_i = 2|E|$$

+2

+2

Лемма о рукопожатиях

Handshaking lemma

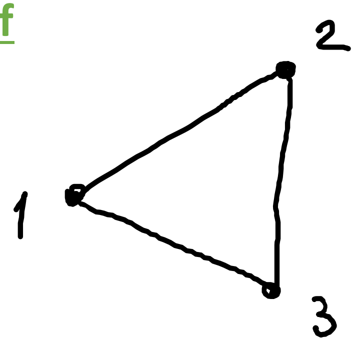
Лемма (о рукопожатиях)

1. Неориентированный граф

Сумма степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу ребер графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$

Proof



$$\sum \deg v_i = 2|E|$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

ЧТД

Лемма о рукопожатиях

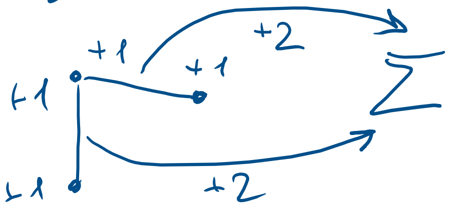
Handshaking lemma

Лемма (о рукопожатиях)

1. Неориентированный граф

Сумма степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу ребер графа

Proof $$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$



Следствие

Произвольный граф содержит четное число вершин нечетной степени

Лемма о рукопожатиях

Handshaking lemma

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$

Следствие

Произвольный граф содержит четное число вершин нечетной степени

Proof

$$\underbrace{\sum \deg v_i}_{\text{чет}} = \underbrace{\sum \deg_{\text{чет}}}_{\text{чет}} + \underbrace{\sum \deg_{\text{неч}}}$$

из лемме $= 2|E|$

математ!

$\underbrace{2+4+6} = \sum_{\text{чет}}$

Лемма о рукопожатиях

Handshaking lemma

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E(G_n)|$$

Следствие

Произвольный граф содержит четное число вершин нечетной степени

Proof

$$\underbrace{\sum \deg v_i}_{\text{чет}} = \underbrace{\sum \deg \text{чет}}_{\text{чет}} + \underbrace{\sum \deg \text{неч}}$$

$2 \cdot E(G_n)$ $\qquad 2 \cdot (\ldots)$

$\Rightarrow$ чет $\Rightarrow$ кол-во верш четное

Лемма о рукопожатиях

Лемма

2. Ориентированный граф

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу дуг графа

$$\sum_{i=1}^{n} deg^- v_i + \sum_{i=1}^{n} deg^+ v_i = 2 \cdot |E(G_n)|$$

Proof

Лемма о рукопожатиях

Лемма

2. Ориентированный граф

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу дуг графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg^- v_i + \sum_{i=1}^{n} \deg^+ v_i = 2 \cdot |E(G_n)|$$

Proof

Лемма о рукопожатиях

Лемма

2. Ориентированный граф

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин графа — четное число, равно удвоенному числу дуг графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg^{-} v_i + \sum_{i=1}^{n} \deg^{+} v_i = 2 \cdot |E(G_n)|$$

+1

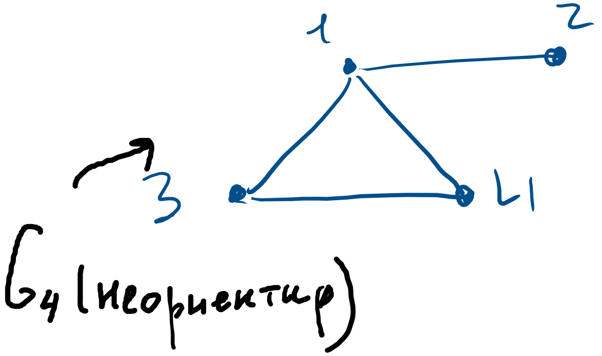
Proof

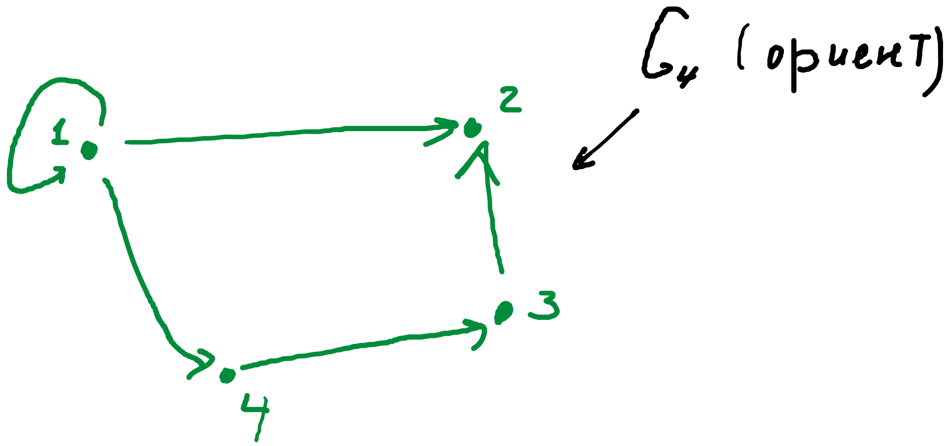
+1

СПОСОБЫ ЗАДАТЬ ГРАФ

Способы задать граф

1 - Диаграмма



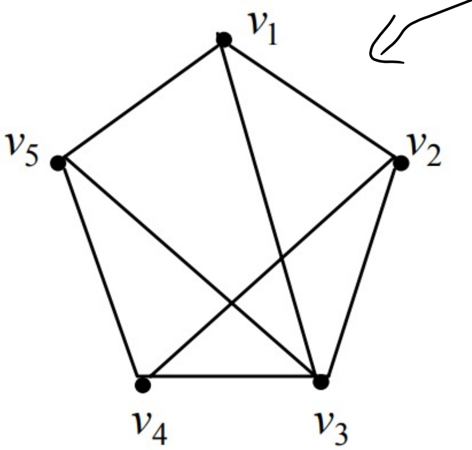


Способы представления графа

1 - Диаграмма

Это диаграмма

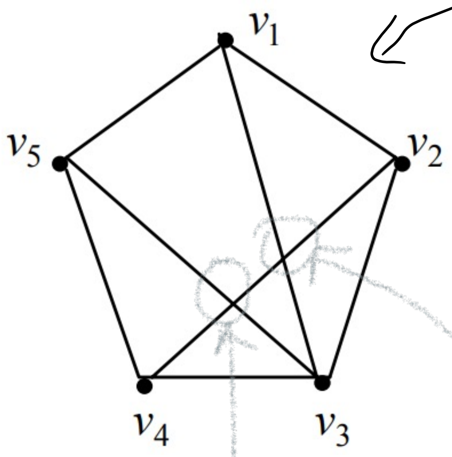
G_5



Способы представления графа

Диаграмма

это диаграмма G_5

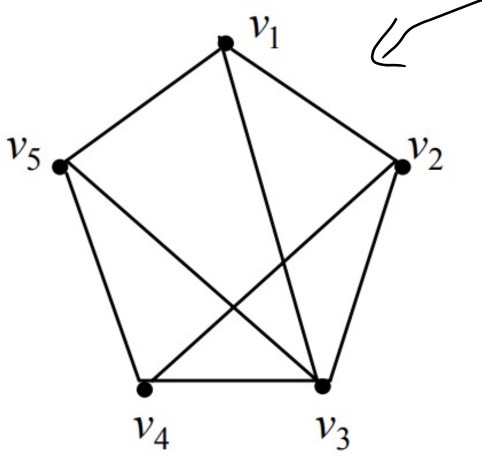


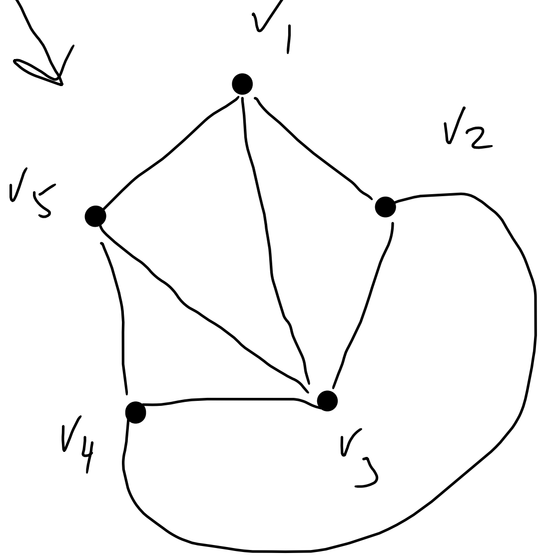
пересечения ребер без вершины в нём

Способы представления графа

Диаграмма

это диаграмма G_5



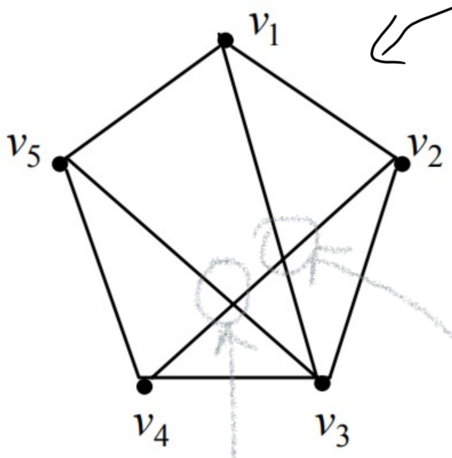


тоже диаграмма того же графа

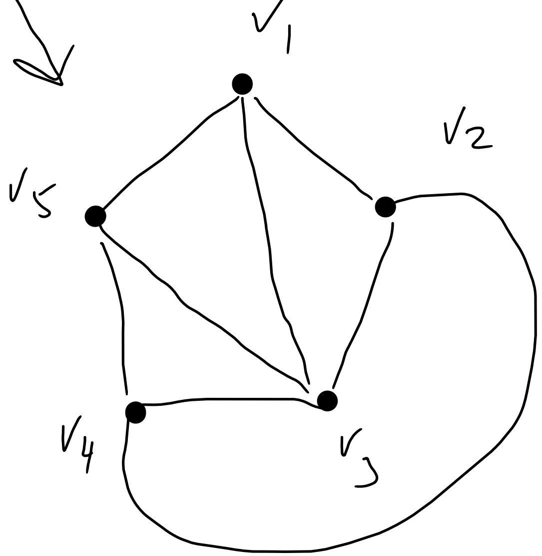
Способы представления графа

Диаграмма

это диаграмма G_5



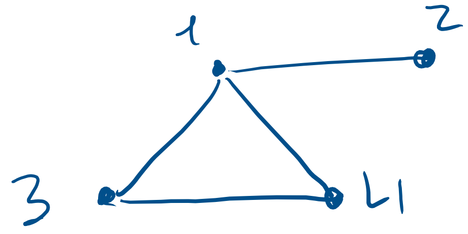
пересечения ребер без вершины в нём



тоже диаграмма того же графа

Способы представления графа

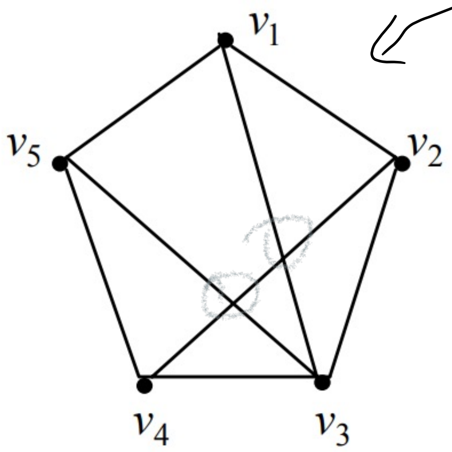
Диаграмма



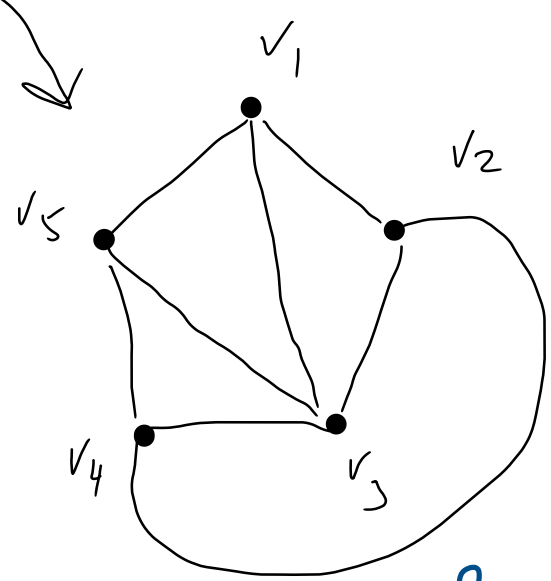
это диаграммы
G5

* Укладка

** Планарная



укладка 1
графа
G5



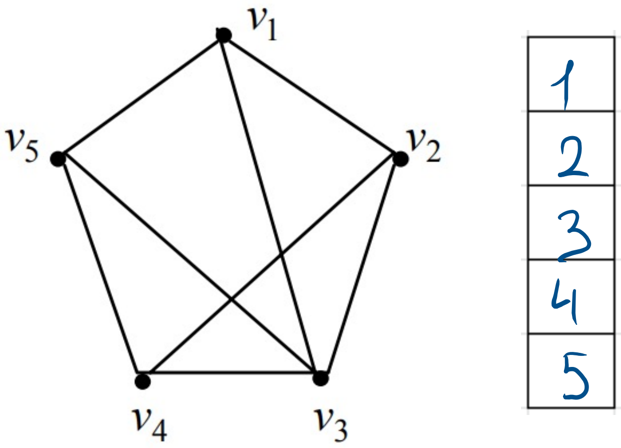
укладка 2
графа
G5

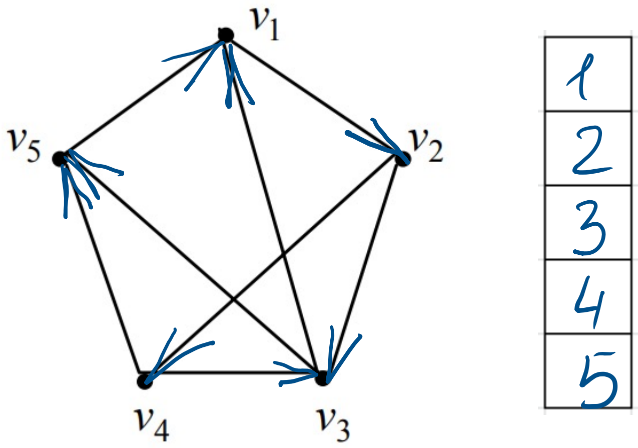
планарная

Способы задать граф

2 - Список смежности *Adjacency list* мало ребер.

(удобны для разреженных *sparse* графов)



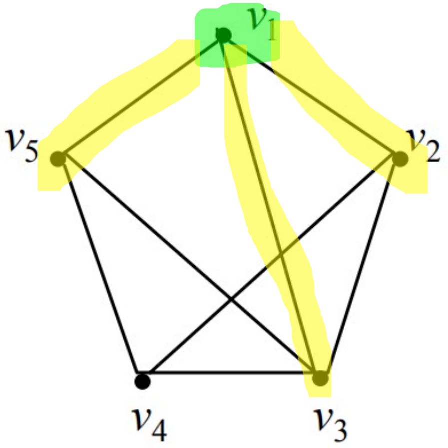


Способы задать граф

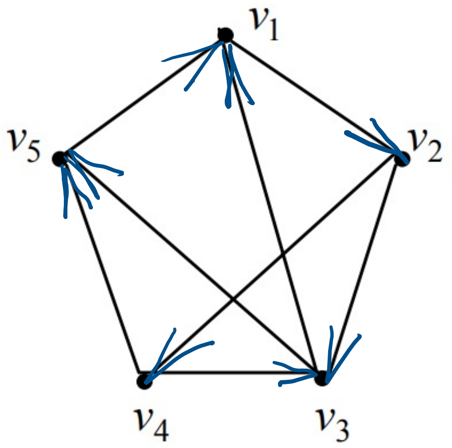
2 - Список смежности *Adjacency list*

мало ребер

(удобны для разреженных *sparse* графов)



1	2, 3, 5
2	
3	
4	
5	

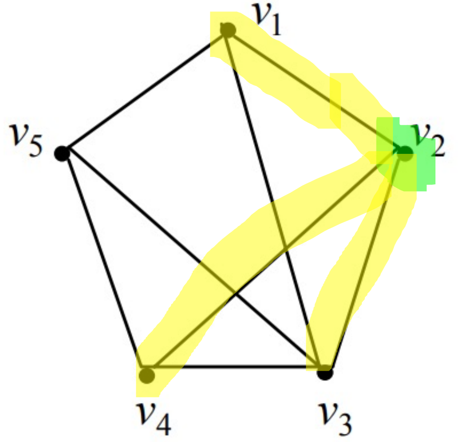


1
2
3
4
5

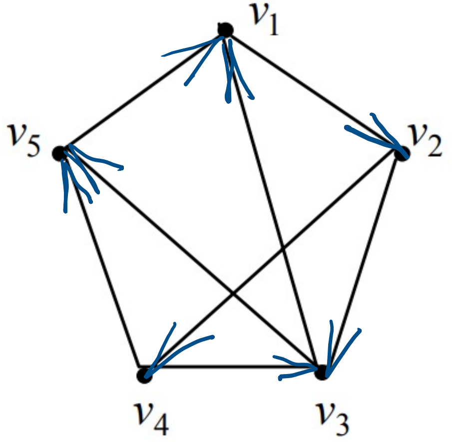
Способы задать граф

2 - Список смежности *Adjacency list* мало ребер.

(удобны для разреженных *sparse* графов)



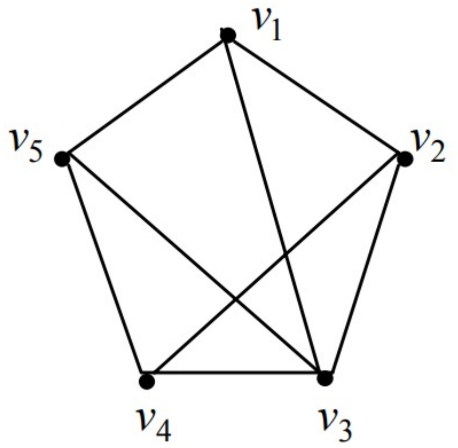
1	2, 3, 5
2	1, 3, 4
3	
4	
5	



1
2
3
4
5

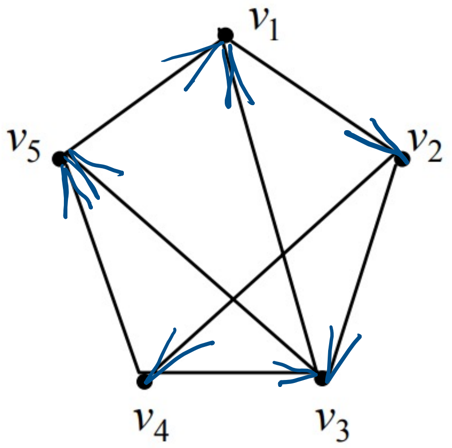
Способы задать граф

2 - Список смежности *Adjacency list*
(удобны для разреженных *sparse* графов) мало ребер



1	2, 3, 5
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4, 5
4	2, 3, 5
5	1, 3, 4

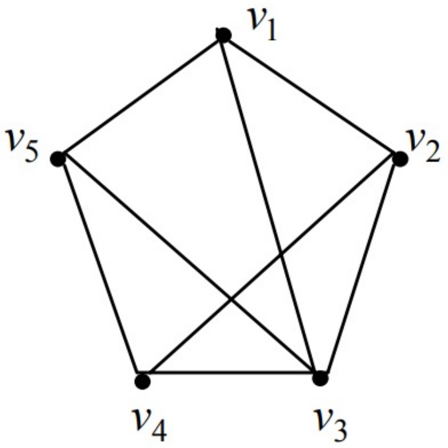
Неориентир!



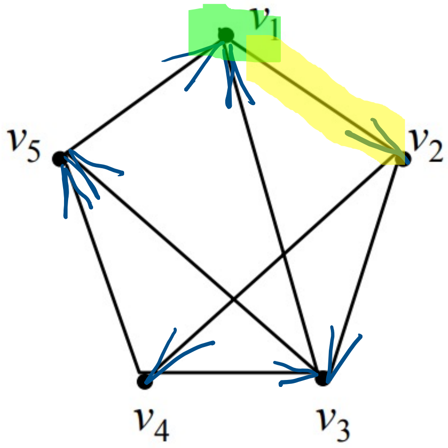
1
2
3
4
5

Способы задать граф

2 - Список смежности *Adjacency list* мало ребер
(удобны для разреженных *sparse* графов)



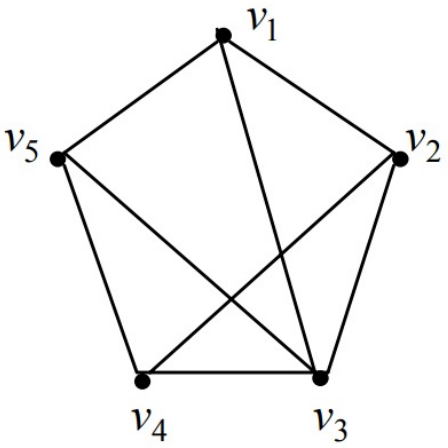
1	2, 3, 5
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4, 5
4	2, 3, 5
5	1, 3, 4



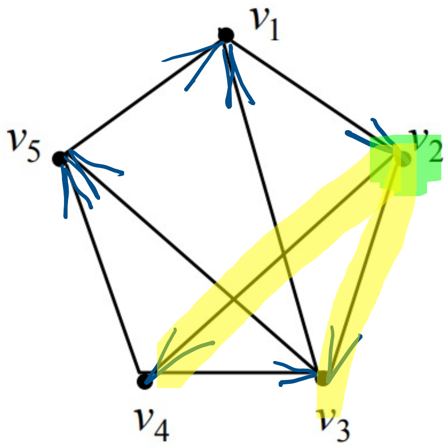
1	2
2	
3	
4	
5	

Способы задать граф

2 - Список смежности *Adjacency list* мало ребер
(удобны для разреженных *sparse* графов)



1	2, 3, 5
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4, 5
4	2, 3, 5
5	1, 3, 4



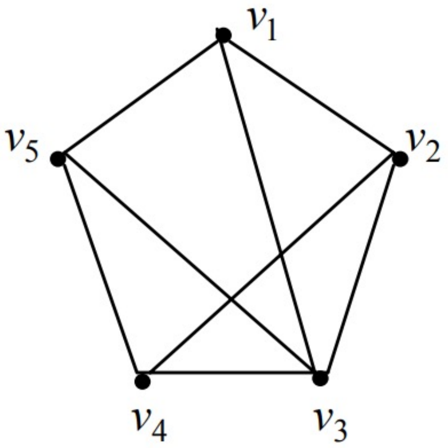
1	2
2	3, 4
3	
4	
5	

Способы задать граф

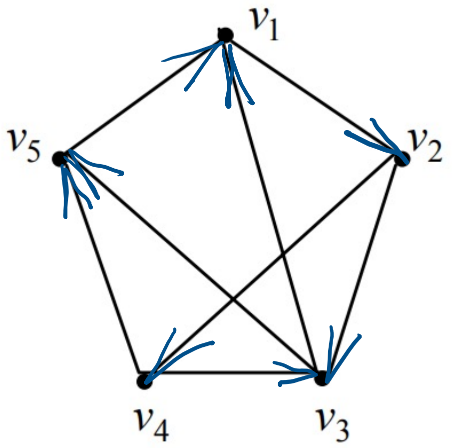
2 - Список смежности *Adjacency list*

мало ребер

(удобны для разреженных *sparse* графов)



1	2, 3, 5
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4, 5
4	2, 3, 5
5	1, 3, 4

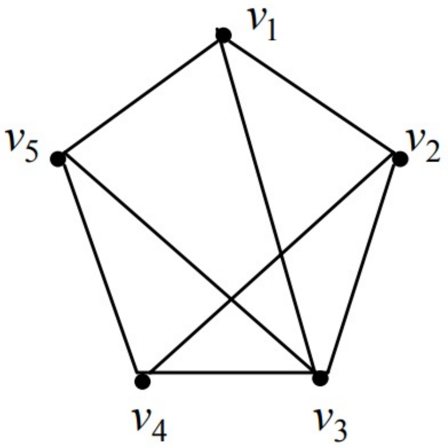


1	2
2	3, 4
3	1, 5
4	3, 5
5	1

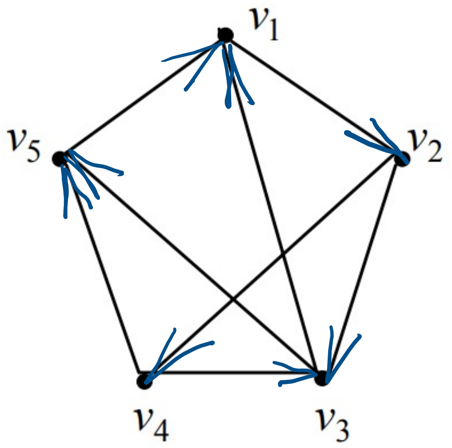
ориентир!

Способы задать граф

2 - Список смежности *Adjacency list* ← мало ребер
(удобны для разреженных *sparse* графов)



1	2, 3, 5
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4, 5
4	2, 3, 5
5	1, 3, 4



1	2
2	3, 4
3	1, 5
4	3, 5
5	1

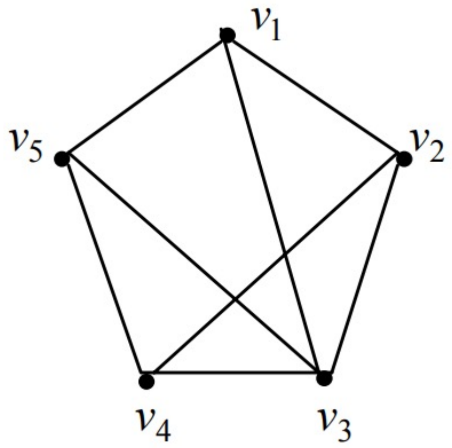
Сумма длин всех списков: $2 \cdot |E|$

$|E|$

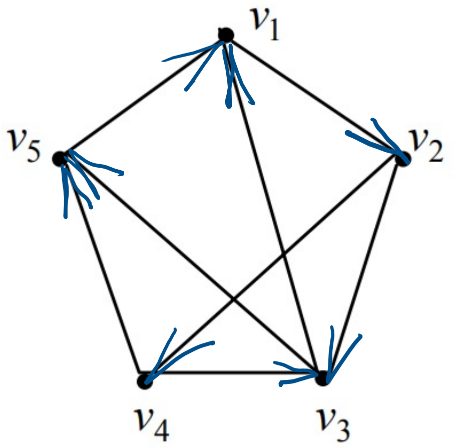
т.к. только исх. дуги!

Способы задать граф

2 - Список смежности *Adjacency list* мало ребер
(удобны для разреженных *sparse* графов)



1	2, 3, 5
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4, 5
4	2, 3, 5
5	1, 3, 4



1	2
2	3, 4
3	1, 5
4	3, 5
5	1

Сумма длин всех списков: $2 \cdot |E|$ $\qquad |E|$

Недостаток:
сложно определить наличие конкретного ребра (требуется поиск по списку)

Напр $\{3, 5\}$? $\Rightarrow$ идем в $[3] \to 1 \to 2 \to 4 \to 5$

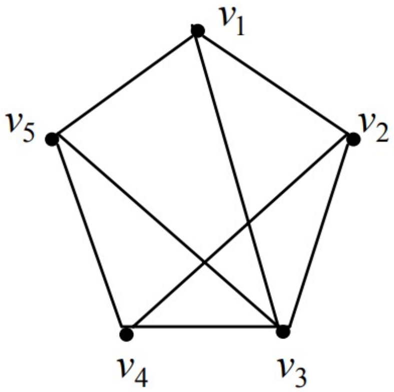
Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

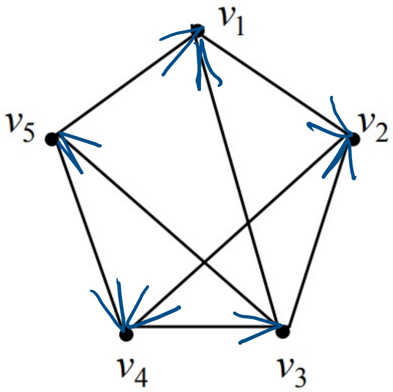
Решение проблемы быстрого нахождения определенного ребра графа

Матрица смежности

(удобны для плотных графов)



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	



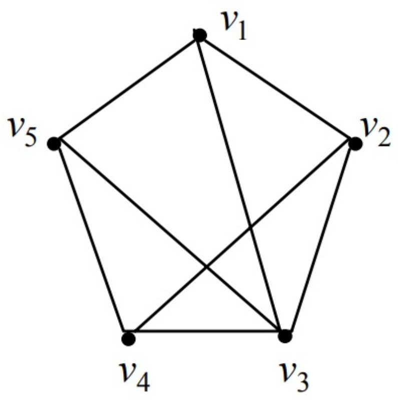
	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Способы представления графа: Матрица смежности

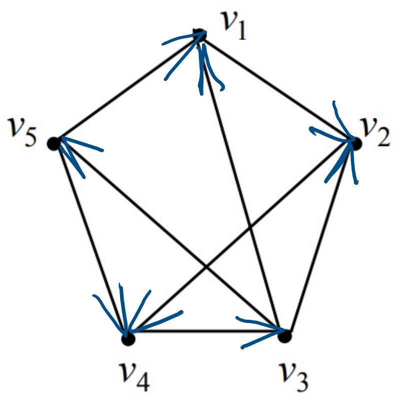
Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A\,[\,VxV\,]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***

(ориентированный): $\boldsymbol{a_{i_j}}$ ***= 1,*** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

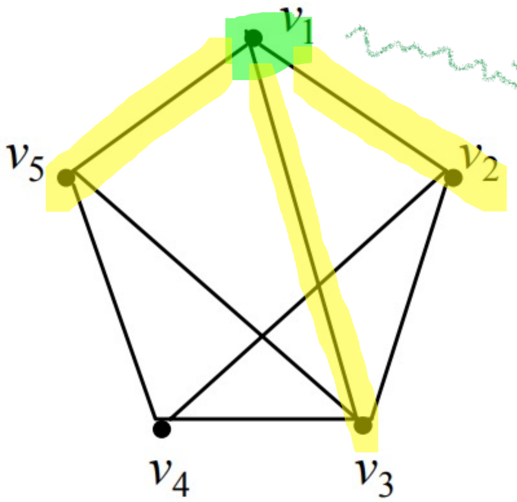


	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{ij}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***

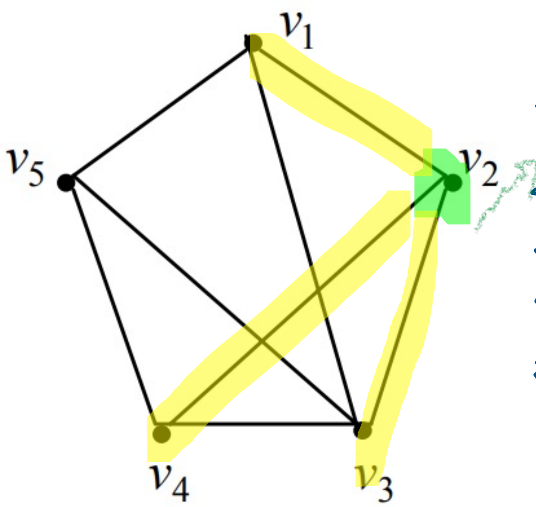


	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2					
3					
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A\ [\ VxV\ ]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***



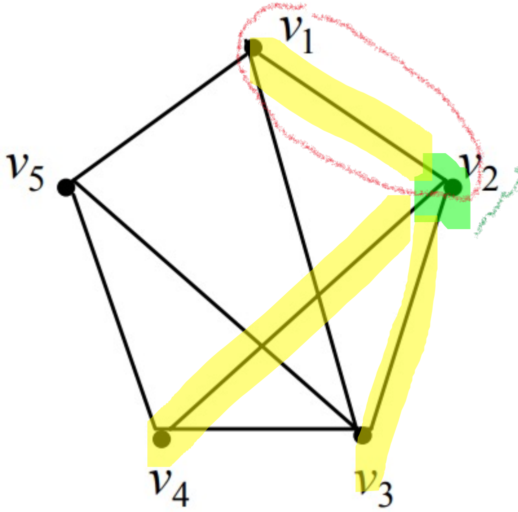
	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	1	0
3					
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***

(ориентированный): $\boldsymbol{a_{i_j}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



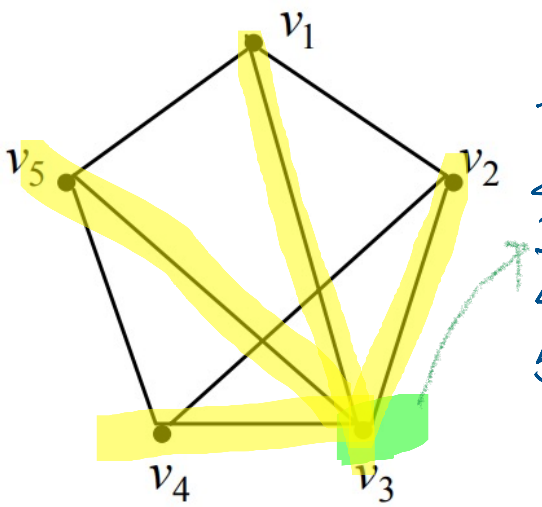
	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	1	0
3					
4					
5					

Симметрично!

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{ij}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***

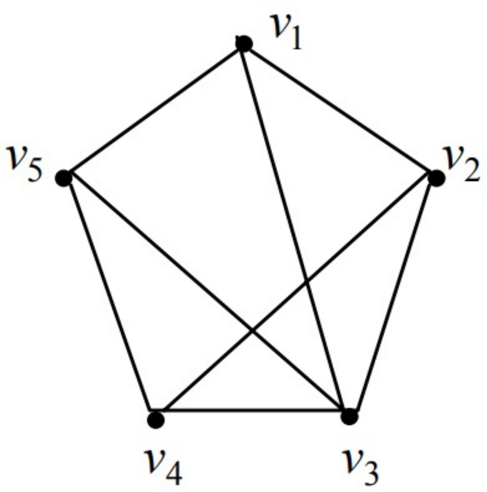


	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	1	0
3	1	1	0	1	1
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A\ [\,VxV\,]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***

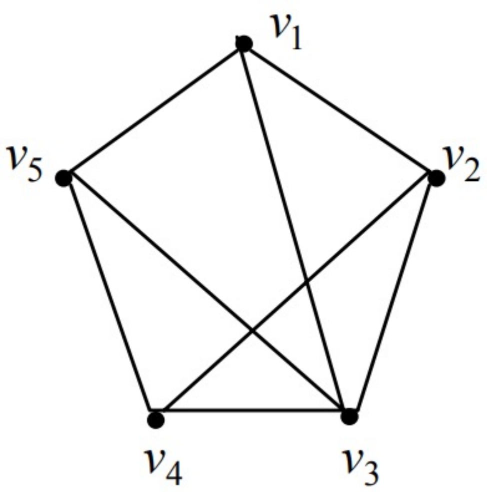


	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $\boldsymbol{A}\ [\ \boldsymbol{VxV}\ ]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***



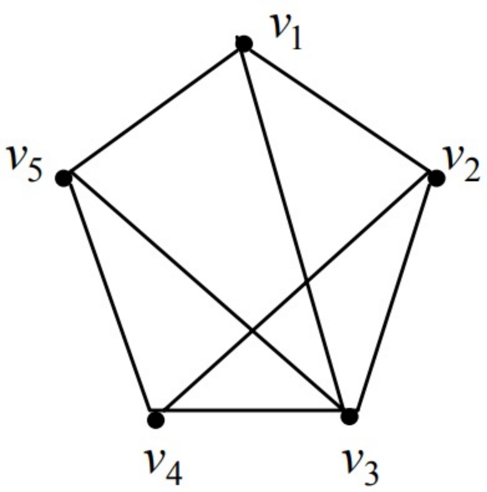
	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

Свойства матрицы смежности:

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $\boldsymbol{A}\ [\ \boldsymbol{VxV}\ ]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

0/1

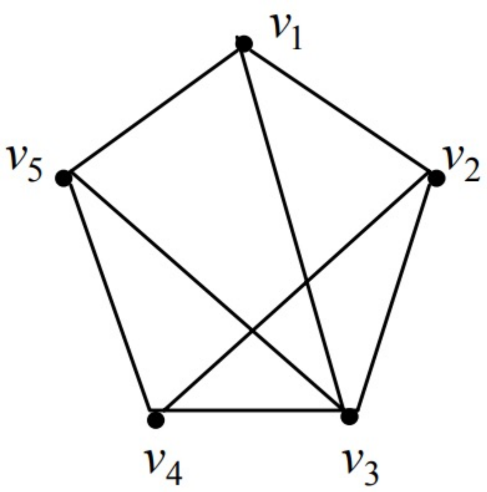
Свойства матрицы смежности:

1) В простом графе — бинарна (0/1)

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $\boldsymbol{A\,[\,V x V\,]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

все 0

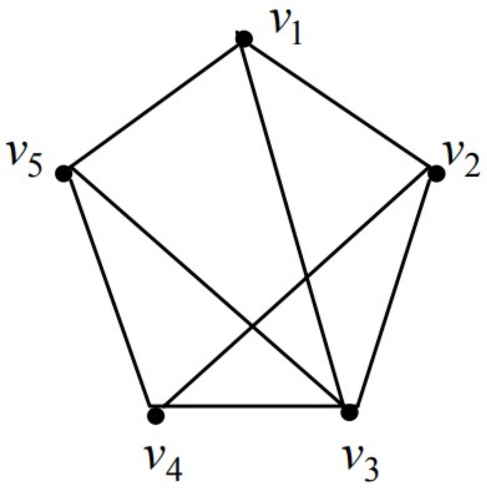
Свойства матрицы смежности:

1) В простом графе — бинарна (0/1)
2) В простом графе — главная диагональ из нулей

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A\,[\,V x V\,]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

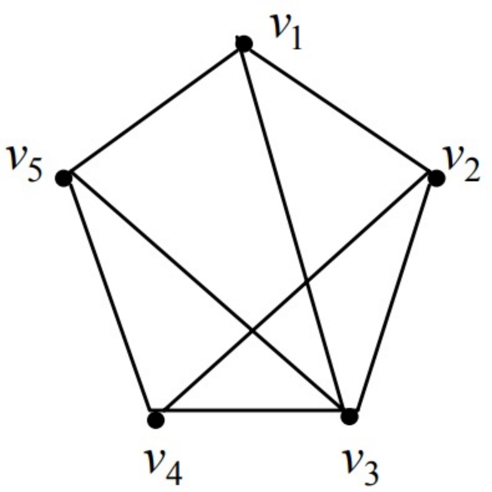
Свойства матрицы смежности:

1) В простом графе — бинарна (0/1)
2) В простом графе — главная диагональ из нулей
3) Для неориентированного — симметрична относительно главной диагонали

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A\,[\,V x V\,]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***

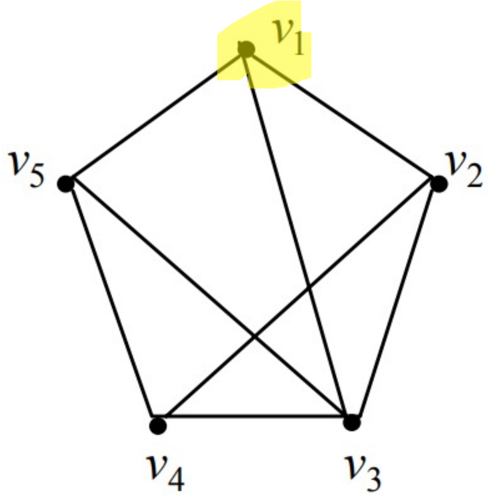


	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

Свойства матрицы смежности:

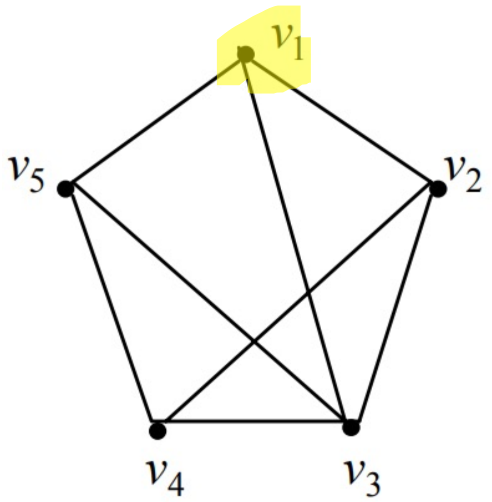
1) В простом графе — бинарна (0/1)
2) В простом графе — главная диагональ из нулей
3) Для неориентированного — симметрична относительно главной диагонали
4) Для неориентированного: можно хранить только все что включает и выше главной диагонали

Матрица смежности неориентированного графа



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

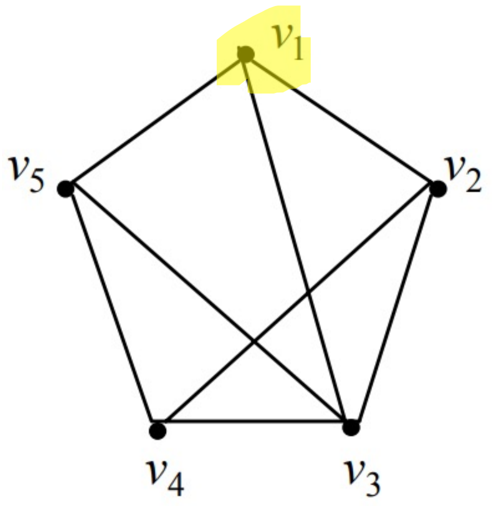
Матрица смежности неориентированного графа



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

$$\sum = \deg v_1 = 3$$

Матрица смежности неориентированного графа

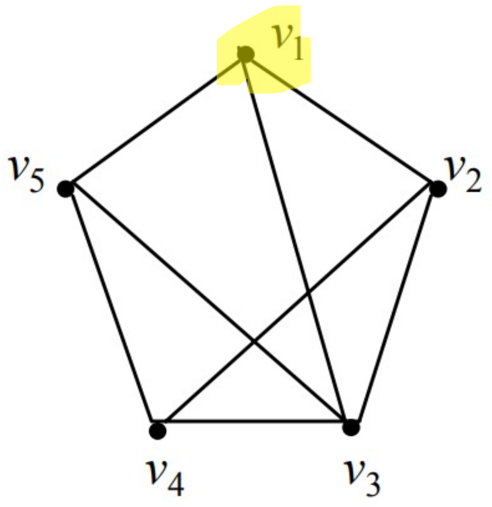


	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

$$\sum = \deg v_1 = 3$$

$$\sum = \deg v_i = 3$$

Матрица смежности неориентированного графа

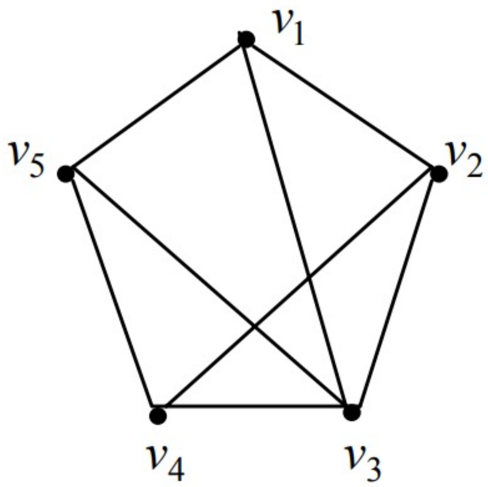


	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

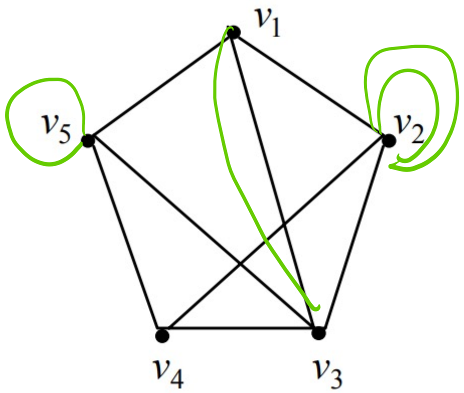
$\Sigma = \deg v_1 = 3$

$\Sigma\Sigma = \sum \deg v_i = 2|E|$

Матрица смежности неориентированного графа



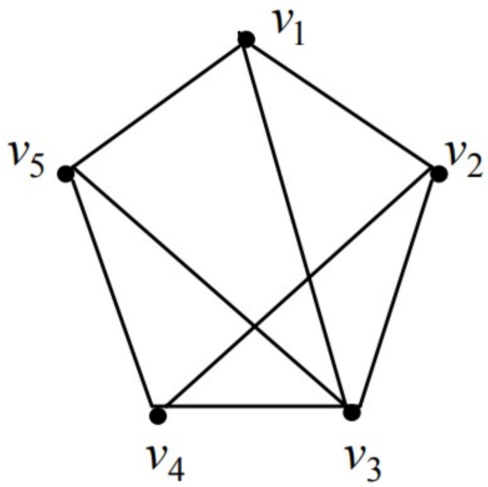
	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

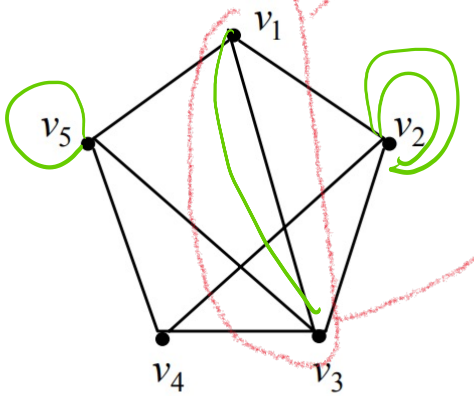
как?

Матрица смежности неориентированного графа



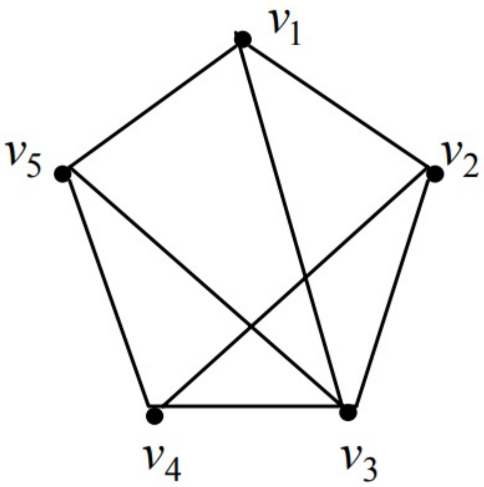
	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

$\Rightarrow$



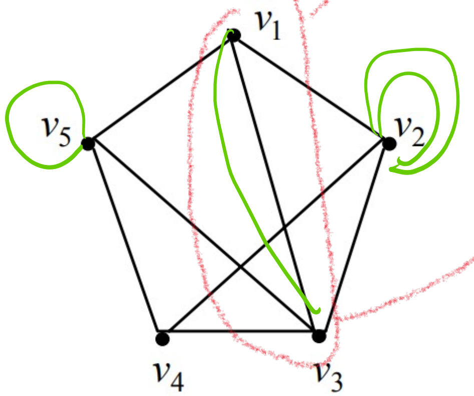
	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

Матрица смежности неориентированного графа



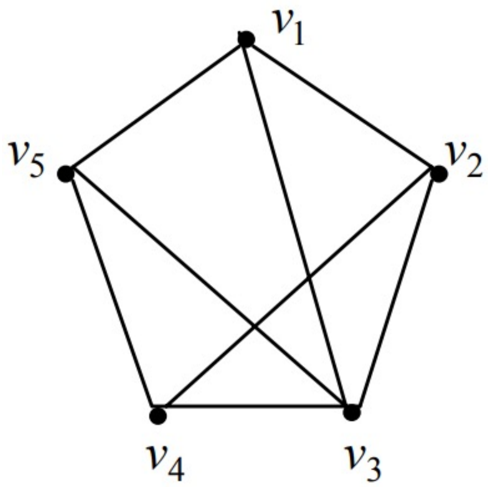
	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

$\Rightarrow$

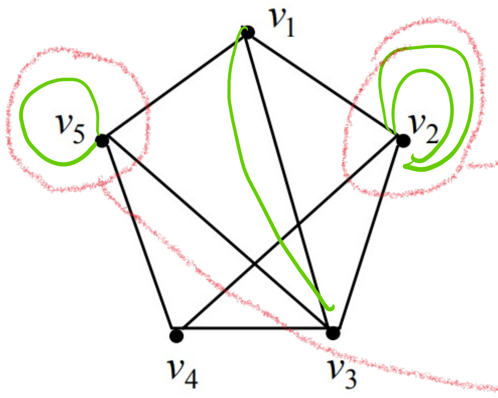


	1	2	3	4	5
1		1	2		1
2	1		1	1	
3	2	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

Матрица смежности неориентированного графа

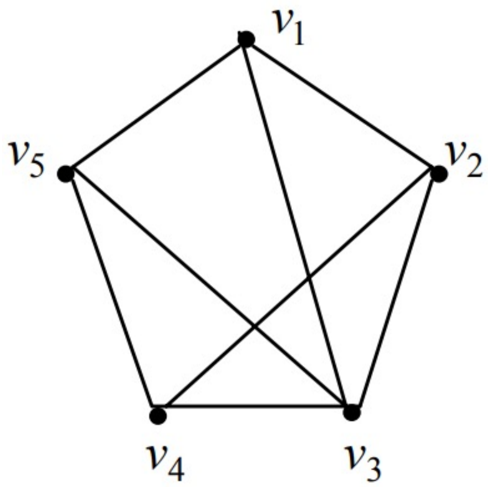


	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	



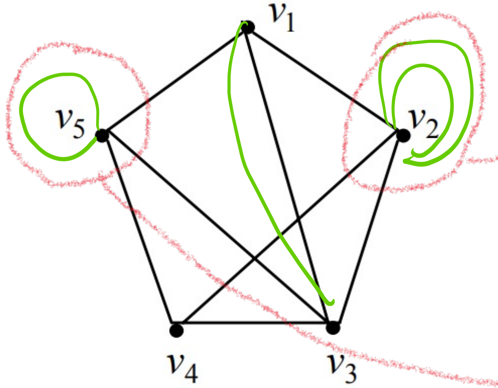
	1	2	3	4	5
1		1	2		1
2	1		1	1	
3	2	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

Матрица смежности неориентированного графа



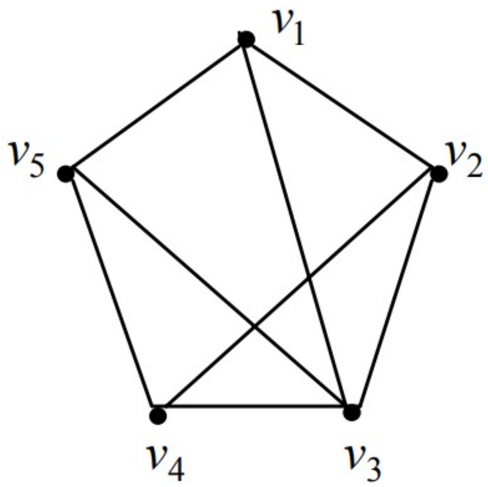
	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

$\Rightarrow$

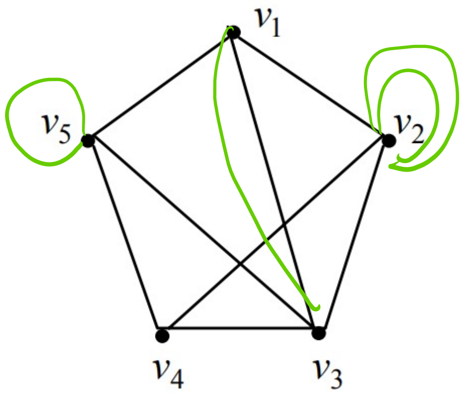


	1	2	3	4	5
1		1	2		1
2	1	4	1	1	
3	2	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	2

Матрица смежности неориентированного графа



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	



	1	2	3	4	5
1		1	2		1
2	1	4	1	1	
3	2	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	2

- Если $i = j$, то в неориентированном графе петля учитывается дважды,

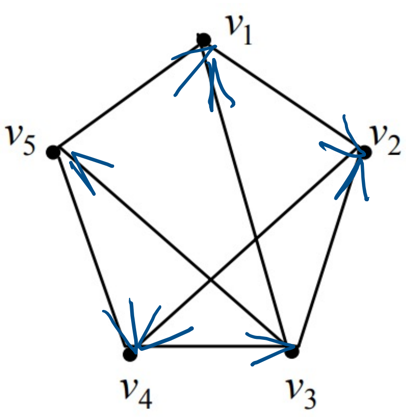
- В неор. графе кратные ребра кратно увеличивают в симметричных ячейка значения (i, j) и (j, i)

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $\boldsymbol{A\ [\ VxV\ ]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{i_j}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



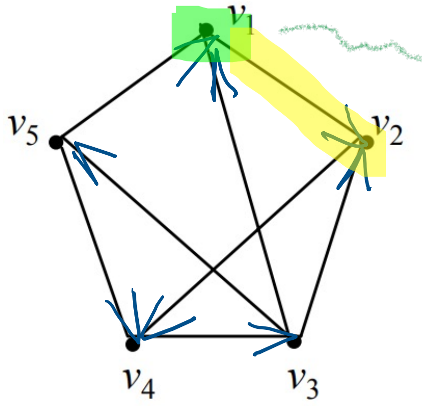
	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр <u>Матрица смежности</u> — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

***a_{i_j}* = 1,** *если из V_i и V_j идет **дуга**, иначе 0!*



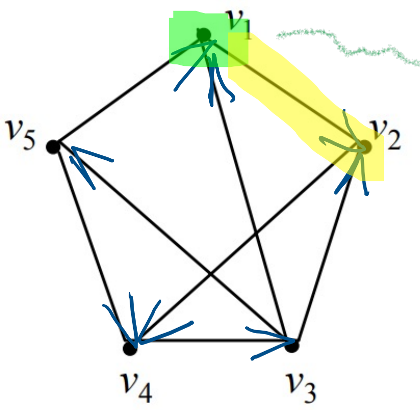
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр <u>Матрица смежности</u> — матрица $\boldsymbol{A\ [\ V x V\ ]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{i_j}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



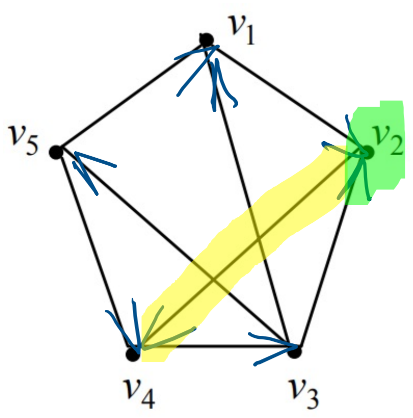
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2					
3					
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр <u>Матрица смежности</u> — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{ij}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{ij}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



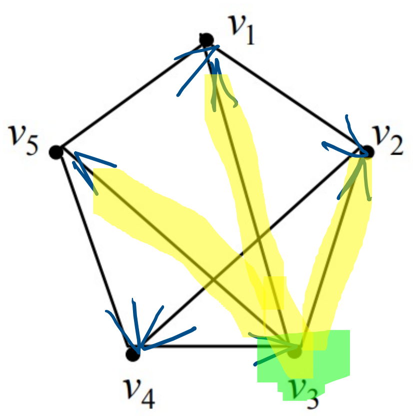
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3					
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A}\ [\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{i_j}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



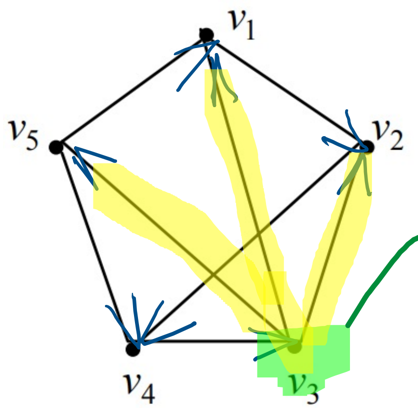
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3					
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **Матрица смежности** — матрица $A\,[\,V x V\,]$, в которой в ячейке a_{i_j} записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

a_{i_j} **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



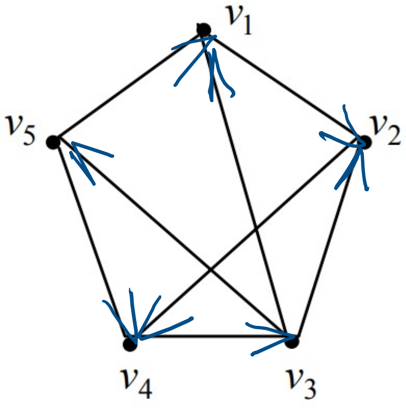
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3	1	1	0	0	1
4					
5					

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A\,[\,VxV\,]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{i_j}}$ = 1, *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



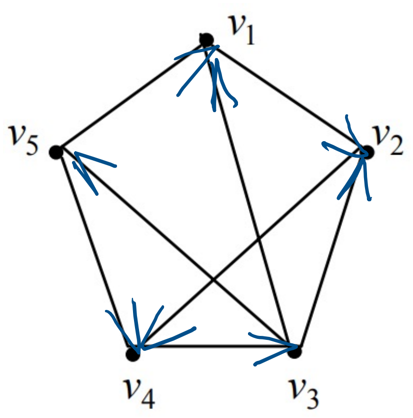
	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр <u>Матрица смежности</u> — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{i_j}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Свойства матрицы смежности:

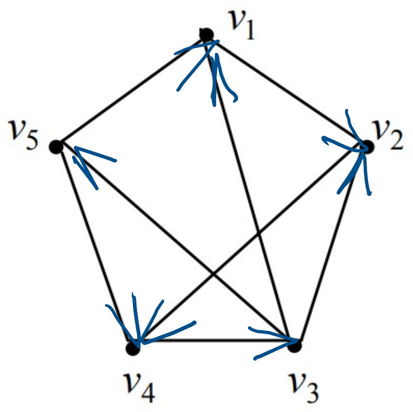
1) В простом графе — бинарна (0/1)
2) В простом графе — главная диагональ из нулей

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{i_j}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Свойства матрицы смежности:

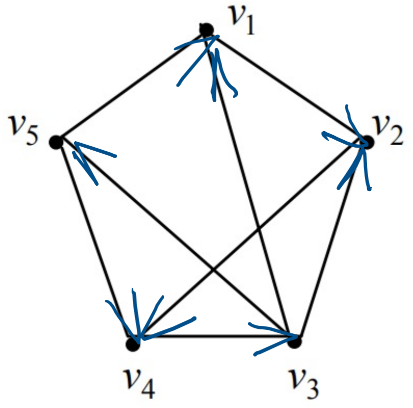
1) В простом графе — бинарна (0/1)
2) В простом графе — главная диагональ из нулей
3) Для ориентированного — сумма элементов i-ой строки равна степени исхода из вершины i, сумма элементов j-го столбца равна степени входа в вершину j

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Опр **<u>Матрица смежности</u>** — матрица $\boldsymbol{A}\,[\,\boldsymbol{VxV}\,]$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число исходящих дуг, соединяющих вершины V_i и V_j:

$\boldsymbol{a_{i_j}}$ **= 1,** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

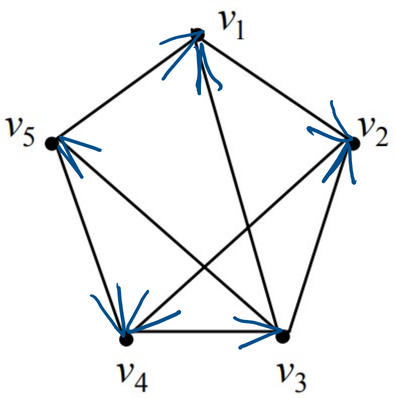
$deg^+ v_1$

$deg^- v_1$

Свойства матрицы смежности:

1) В простом графе — бинарна (0/1)
2) В простом графе — главная диагональ из нулей
3) Для ориентированного — сумма элементов i-ой строки равна степени исхода из вершины i, сумма элементов j-го столбца равна степени входа в вершину j

Матрица смежности ориентированного графа

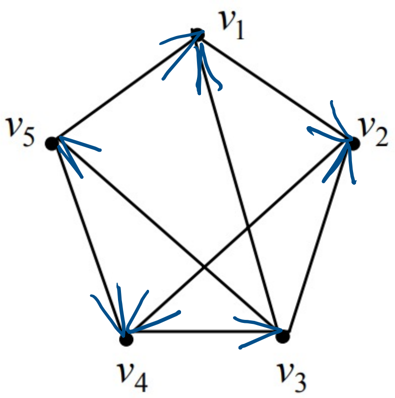


	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

$\deg^+ v_1$

$\deg^- v_1$

Матрица смежности ориентированного графа



	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

$\deg^+ v_1$

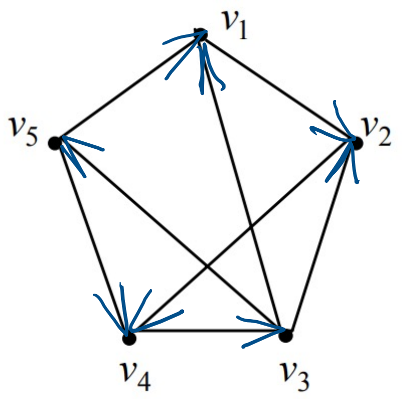
$\deg^- v_1$

$\sum_{i=1}^{n} \deg^+ v_i$ $\quad \Sigma^+$

$\sum_{i=1}^{n} \deg^- v_i$

Σ^-

Матрица смежности ориентированного графа



$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & & 1 & & & \\
2 & & & & 1 & \\
3 & 1 & 1 & & & 1 \\
4 & & & 1 & & \\
5 & 1 & & & 1 &
\end{array}
$$

$\deg^+ v_1$

$\deg^- v_1$

$$\sum_{i=1}^{n} \deg^+ v_i$$

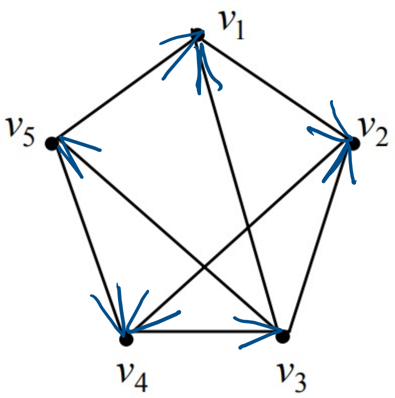
$$\sum_{i=1}^{n} \deg^- v_i$$

$$\Sigma^+ = |E|$$

$$\Sigma^- = |E|$$

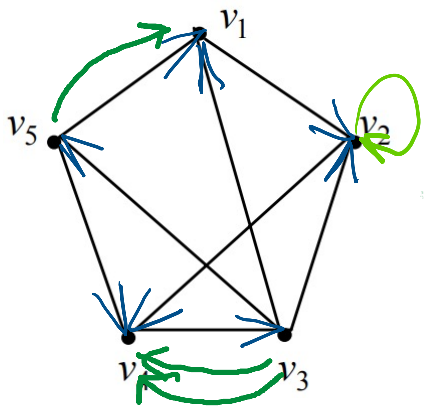
$$\Sigma^+ + \Sigma^- = 2|E|$$

Матрица смежности ориентированного графа



	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

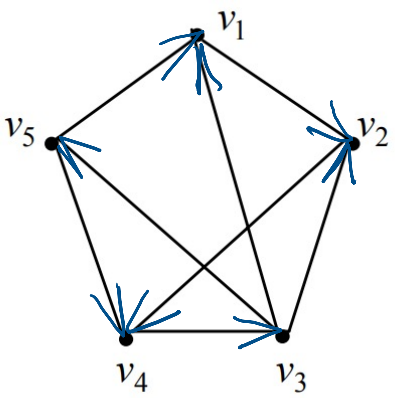
$\Longrightarrow$



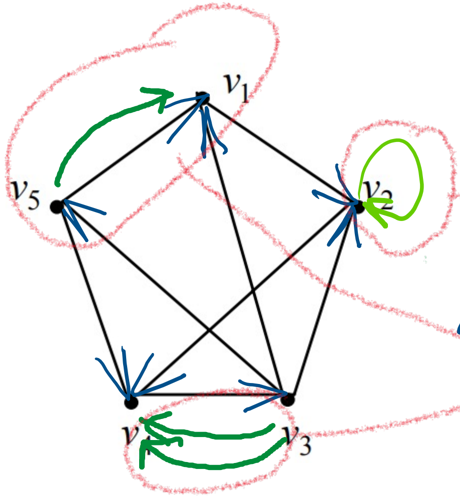
	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

как?

Матрица смежности ориентированного графа

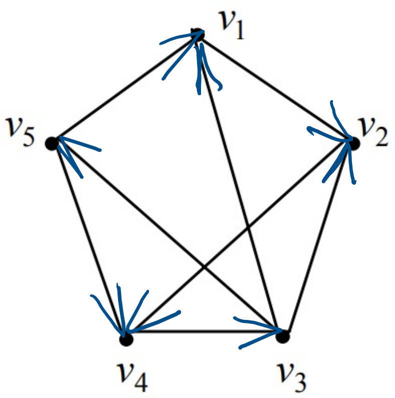


	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	



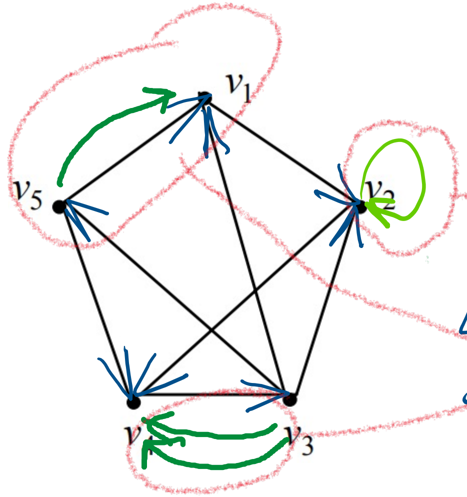
	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Матрица смежности ориентированного графа



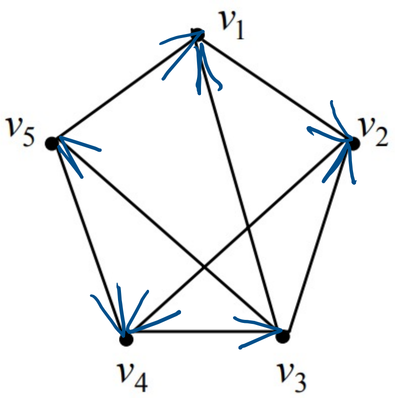
	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

$\Rightarrow$

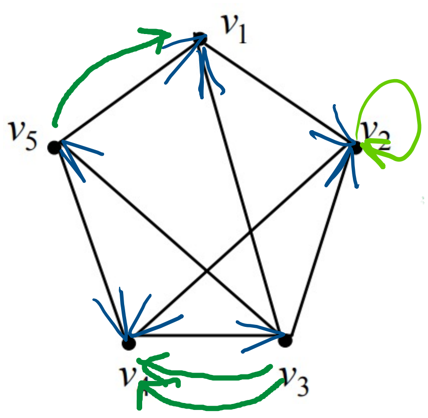


	1	2	3	4	5
1		1			
2		1		1	
3	1	1		2	1
4			1		
5	2			1	

Матрица смежности ориентированного графа



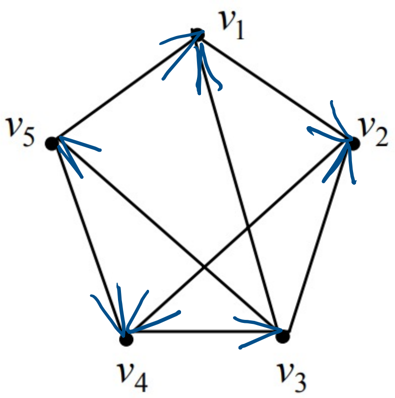
	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	



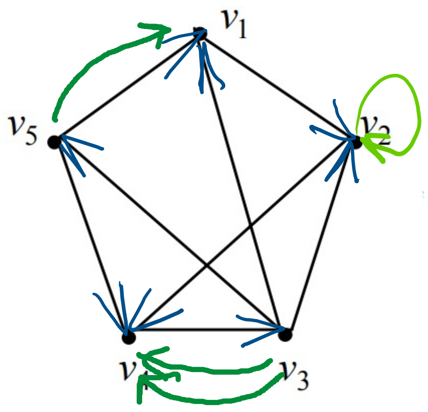
	1	2	3	4	5
1		1			
2		1		1	
3	1	1		2	1
4			1		
5	2			1	

как?

Матрица смежности ориентированного графа



	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	



	1	2	3	4	5
1		1			
2		1		1	
3	1	1		2	1
4			1		
5	2			1	

- Если $i = j$, то в ориентированном графе петля учитывается <u>единожды</u>,

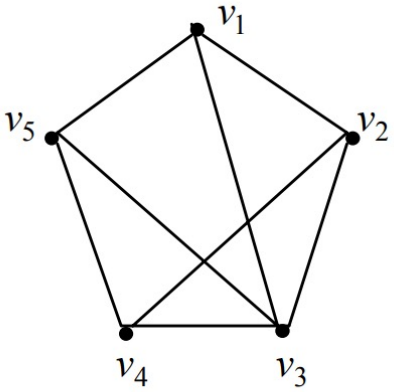
- В ор. графе кратные дуги кратно увеличивают в ячейке (i, j) значения

Способы представления графа: Матрица смежности

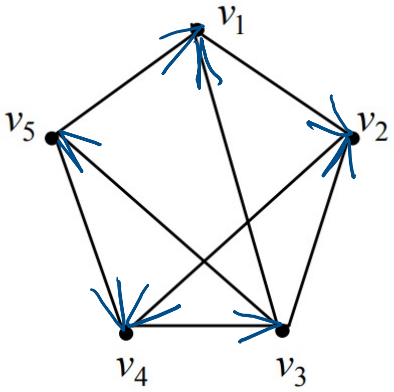
Adjacency matrix

Опр <u>**Матрица смежности**</u> — матрица $\boldsymbol{A\ [\ V x V\ ]}$, в которой в ячейке $\boldsymbol{a_{i_j}}$ записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j. ***(неориентир)***

(ориентированный): $\boldsymbol{a_{i_j}}$ ***= 1,*** *если из* V_i и V_j *идет* ***дуга****, иначе 0!*



	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	



	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

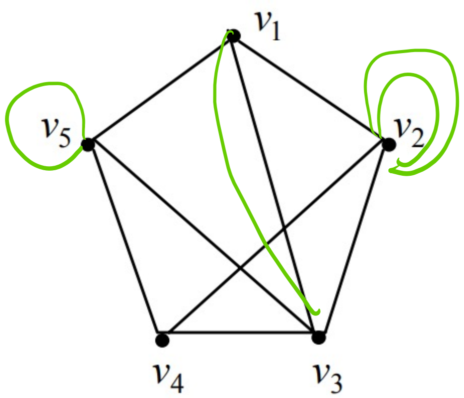
Решение проблемы быстрого нахождения определенного ребра графа

Матрица смежности

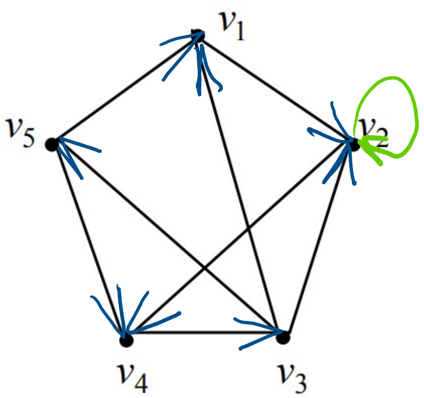
(удобны для плотных графов)

Опр Матрица смежности — матрица $A[VxV]$, в которой в ячейке a_{i_j} записано число ребер, соединяющих вершины V_i и V_j.

Если $i = j$, то в неориентированном графе петля учитывается дважды, в ориентированном — единожды.



	1	2	3	4	5
1		1	2		1
2	1	4	1	1	
3	2	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	2



	1	2	3	4	5
1		1			
2		1		1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

Для неориентированного: можно хранить только все что включает и выше главной диагонали

Способы представления графа: Матрица смежности

Adjacency matrix

Свойства матрицы смежности:

1) В простом графе — бинарна нет петель и кратных ребер
2) В простом графе — главная диагональ из нулей нет петель
3) Для неориентированного — симметрична относительно главной диагонали
4) Для ориентированного — сумма элементов i-ой строки равна степени исхода из вершины i, сумма элементов j-го столбца равна степени входа в вершину j

	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4		1	1		1
5	1		1	1	

$\Sigma \; 3 = \deg 1$

$\Sigma = 2|E|$

	1	2	3	4	5
1		1			
2				1	
3	1	1			1
4			1		
5	1			1	

$\Sigma \deg^+$

$\Sigma \deg^-$

$\Sigma = |E|$

?1) Σ всех значений
2) Σ по строке
3) Σ по столбцу

4) м.б. матрица орграфа симметрична
5) а направленного

Важное определение

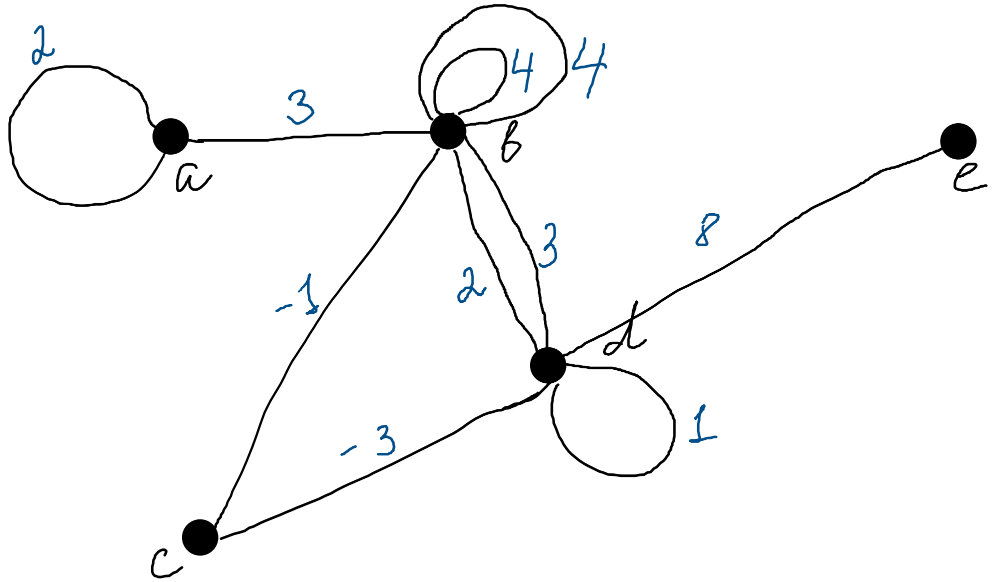
Взвешенный граф

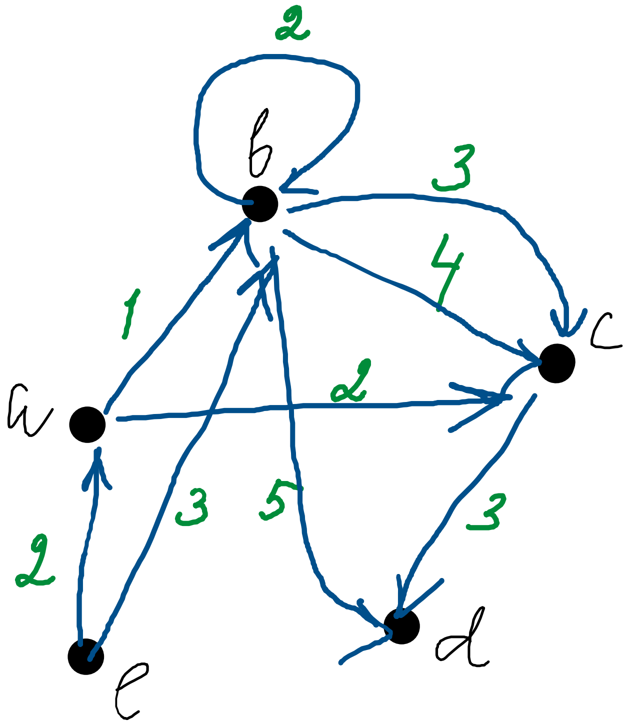
Опр **Взвешенный граф** — граф с весами на ребрах / дугах
Weighted graph or a Network

Взвешенный граф

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах / дугах

Weighted graph or a Network

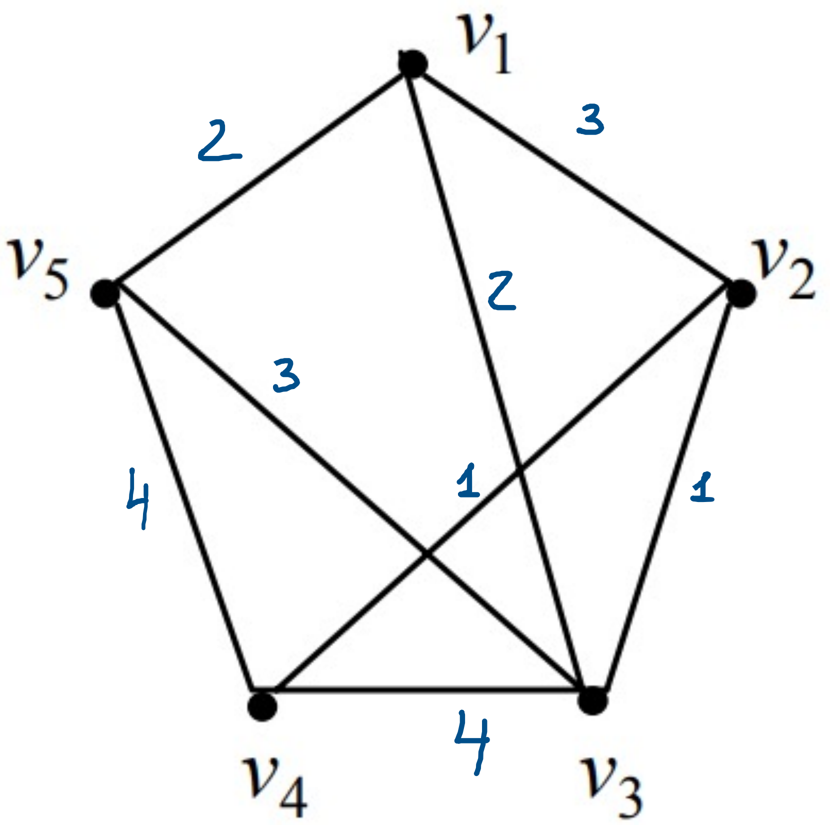




Взвешенный граф

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах / дугах

Weighted graph or a Network

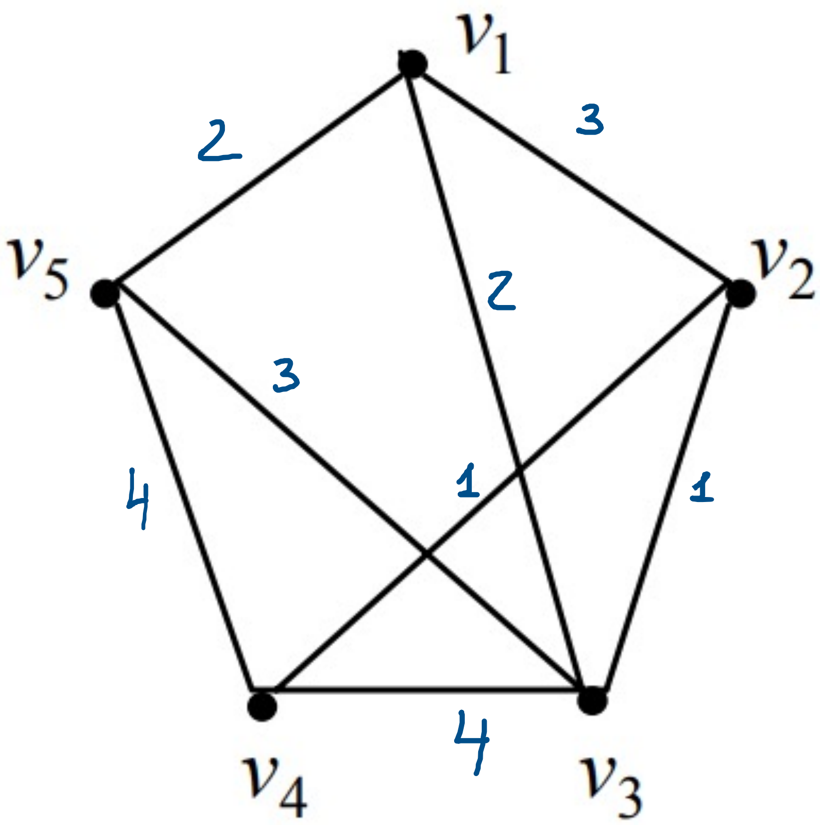


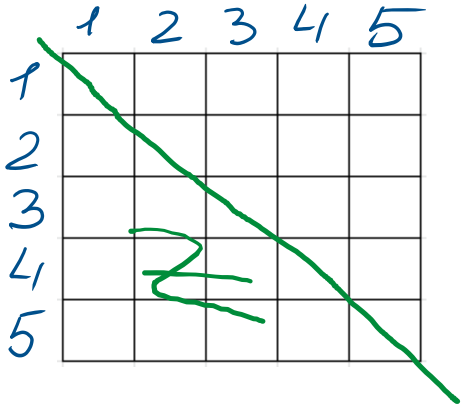
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Взвешенный граф

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах / дугах

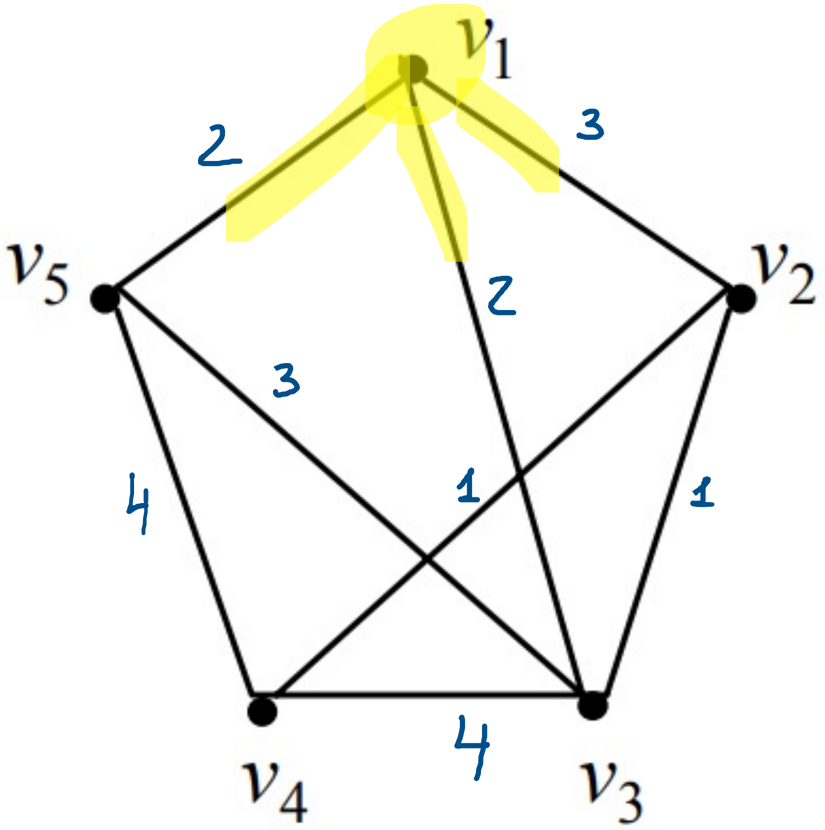
Weighted graph or a Network





Взвешенный граф

Опр **<u>Взвешенный граф </u>** — граф с весами на ребрах / дугах
Weighted graph or a Network

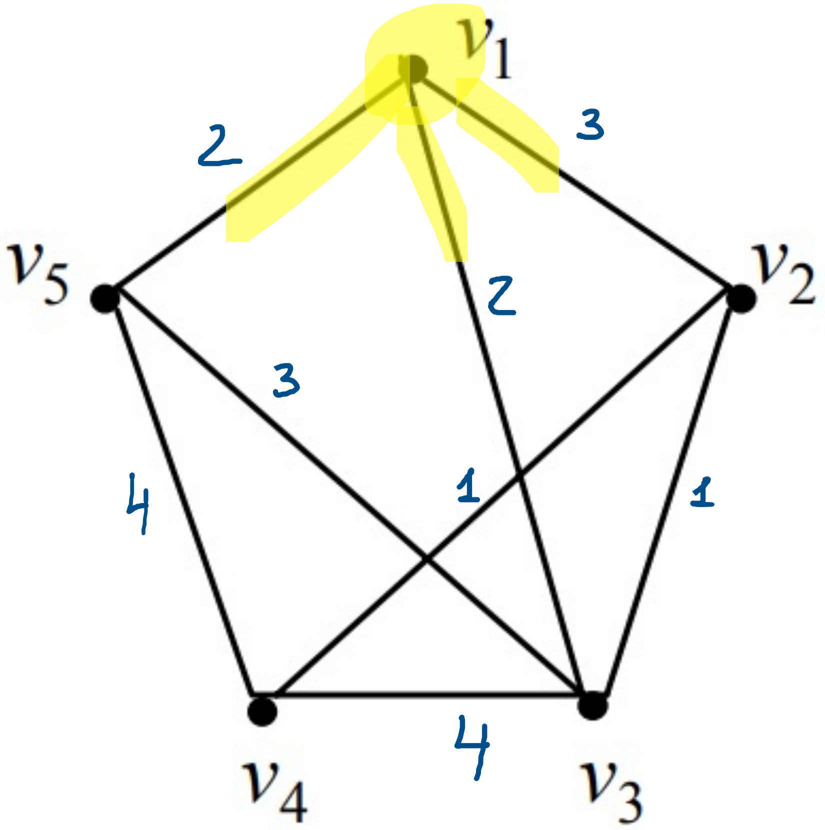


	1	2	3	4	5
1	?	3	2	?	2
2					
3					
4					
5					

Взвешенный граф

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах / дугах

Weighted graph or a Network



	1	2	3	4	5
1	∞	3	2	∞	2
2					
3					
4					
5					

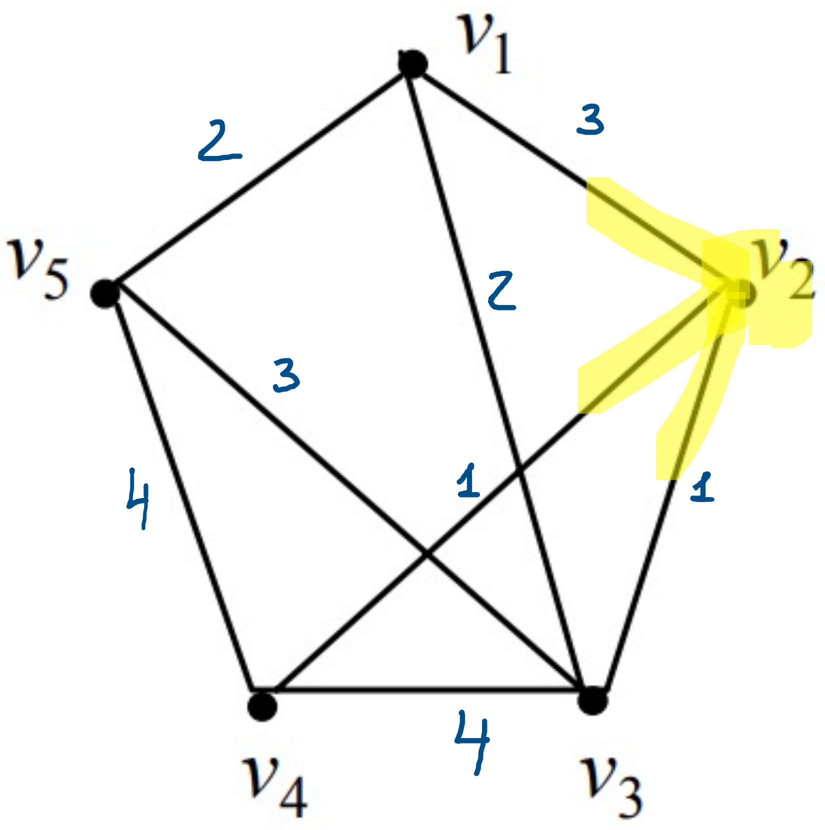
Взвешенные графы:

вместо **1** хранит вес ребра,

вместо 0 — $null$ / ∞

Взвешенный граф

Опр **Взвешенный граф** — граф с весами на ребрах / дугах
Weighted graph or a Network



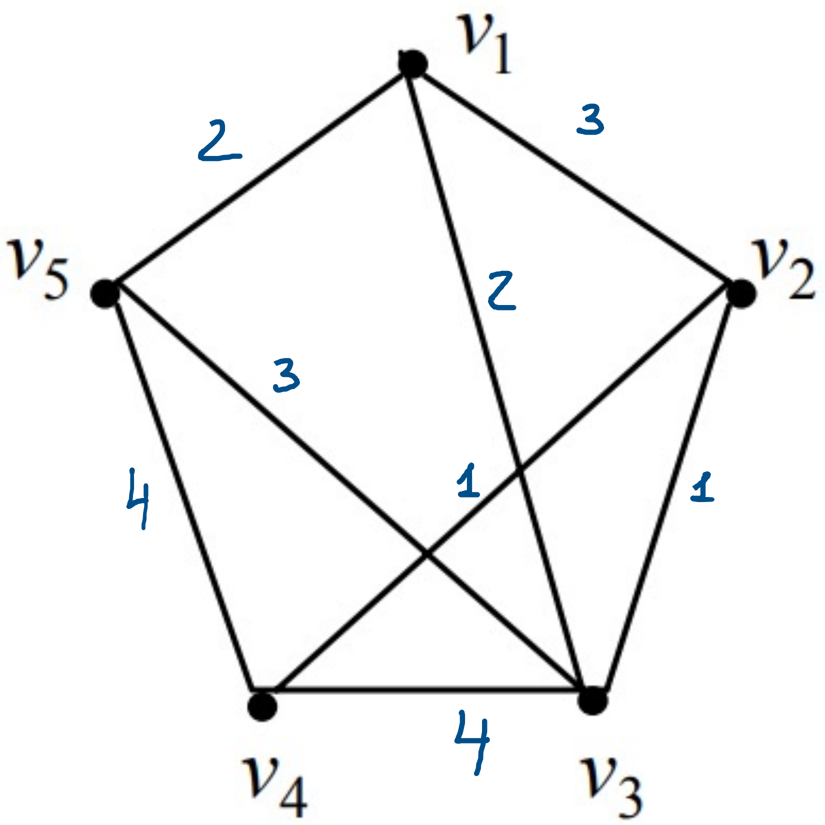
	1	2	3	4	5
1	∞	3	2	∞	2
2			1	1	∞
3					
4					
5					

Взвешенные графы:

вместо $\mathbf{1}$ хранит вес ребра,
вместо 0 — $null$

Взвешенный граф

Опр **Взвешенный граф** — граф с весами на ребрах / дугах
Weighted graph or a Network



	1	2	3	4	5
1	∞	3	2	∞	2
2			1	1	∞
3				4	3
4					4
5					

Взвешенные графы:

вместо **1** хранит вес ребра,
вместо 0 — $null$

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ

Способы представления графа: <u>Матрица инцидентности</u>

Incidence matrix

Матрица инцидентности Для простоты описания кратных ребер, петель

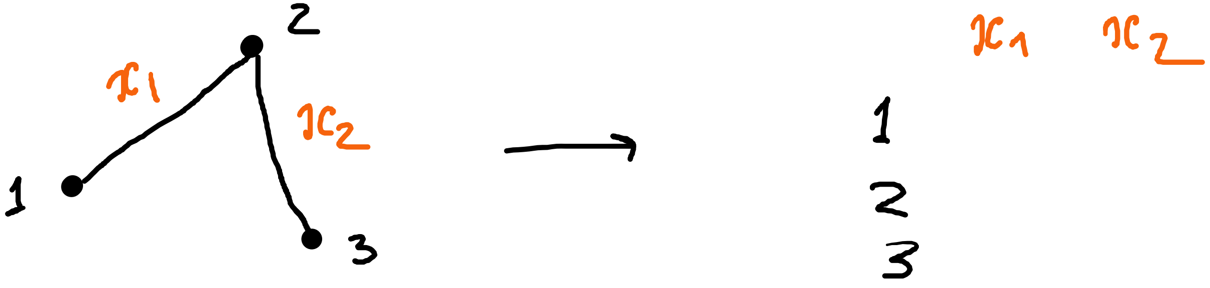
Опр <u>Матрица инцидентности</u> (для **неориентированного** графа) — матрица $\boldsymbol{I}$ размера $|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|$**,** для которой

$\boldsymbol{I_{i_j}=1}$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $\boldsymbol{I_{i_j}=0}$

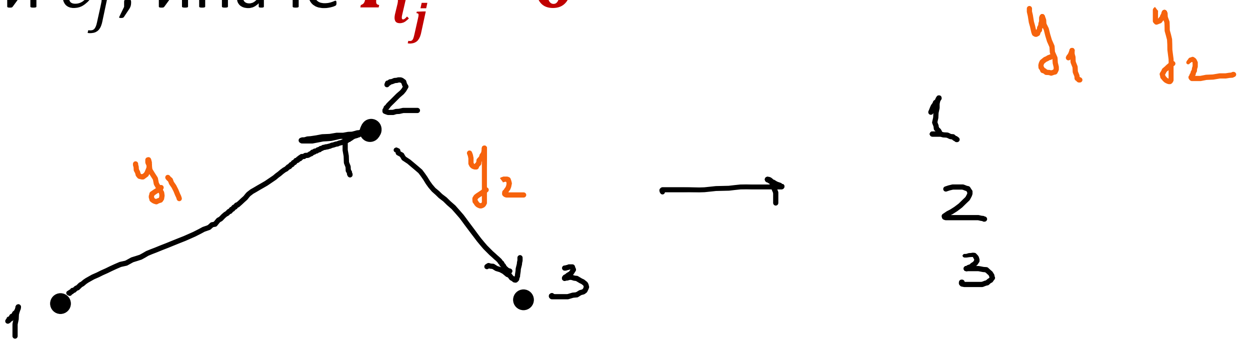
Опр <u>Матрица инцидентности</u> (для **ориентированного** графа) — матрица $\boldsymbol{I}$ размера $|\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{E}|$**,** для которой

$\boldsymbol{I_{i_j}=1}$, если вершина v_i начало дуги e_j, $\boldsymbol{I_{i_j}=-1}$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $\boldsymbol{I_{i_j}=0}$

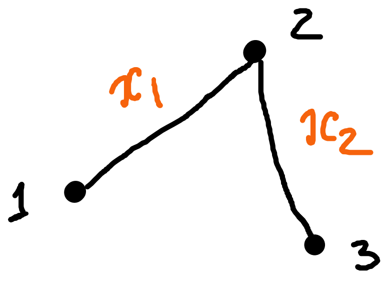
Опр Матрица инцидентности (для **неориентированного** графа) — матрица $\boldsymbol{I}$ размера $|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|$, для которой $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{1}$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{0}$



Опр Матрица инцидентности (для **ориентированного** графа) — матрица $\boldsymbol{I}$ размера $|\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{E}|$, для которой $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{1}$, если вершина v_i начало дуги e_j, $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{-1}$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{0}$



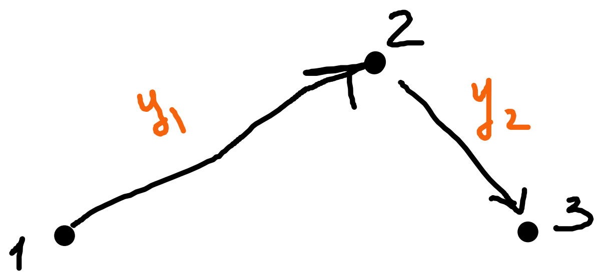
Опр <u>Матрица инцидентности</u> (для **неориентированного** графа) — матрица $\boldsymbol{I}$ размера $|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|$, для которой $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{1}$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{0}$



→

	x_1	x_2
1	1	0
2	1	1
3	0	1

Опр <u>Матрица инцидентности</u> (для **ориентированного** графа) — матрица $\boldsymbol{I}$ размера $|\boldsymbol{V}| x |\boldsymbol{E}|$, для которой $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{1}$, если вершина v_i начало дуги e_j, $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{-1}$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $\boldsymbol{I_{i_j}} = \mathbf{0}$



→

	y_1	y_2
1	1	0
2	-1	1
3	0	-1

Способы представления графа: Матрица инцидентности

Incidence matrix

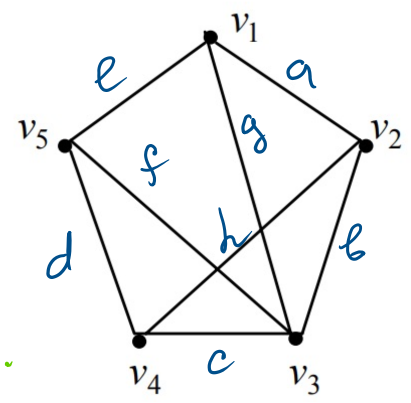
Матрица инцидентности Для простоты описания кратных ребер, петель

Опр Матрица инцидентности (для неориентированного графа) — матрица I размера $|V|\times|E|$, для которой

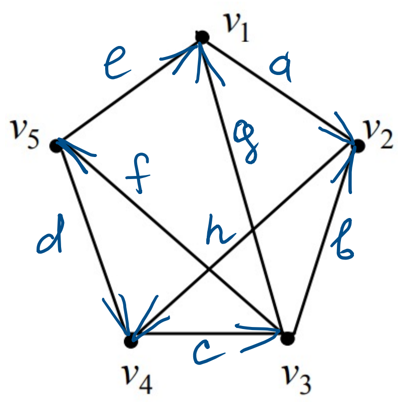
$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $I_{i_j} = 0$

Опр Матрица инцидентности (для ориентированного графа) — матрица I размера $|V|x|E|$, для которой

$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i начало дуги e_j, $I_{i_j} = -1$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $I_{i_j} = 0$



	a	b	c	d	e	f	g	h
1								
2								
3								
4								
5								



	a	b	c	d	e	f	g	h
1								
2								
3								
4								
5								

Способы представления графа: Матрица инцидентности

Incidence matrix

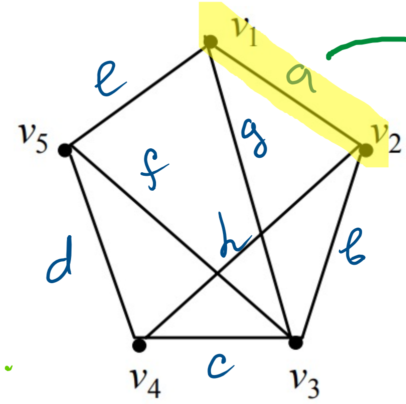
Матрица инцидентности Для простоты описания кратных ребер, петель

Опр Матрица инцидентности (для неориентированного графа) — матрица I размера $|V|\times|E|$, для которой

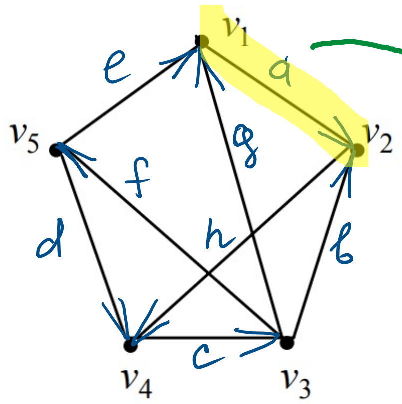
$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $I_{i_j} = 0$

Опр Матрица инцидентности (для ориентированного графа) — матрица I размера $|V|x|E|$, для которой

$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i начало дуги e_j, $I_{i_j} = -1$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $I_{i_j} = 0$



	a	b	c	d	e	f	g	h
1								
2								
3								
4								
5								



	a	b	c	d	e	f	g	h
1								
2								
3								
4								
5								

Способы представления графа: Матрица инцидентности

Incidence matrix

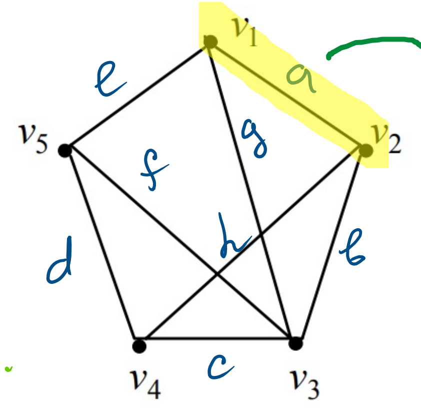
Матрица инцидентности Для простоты описания кратных ребер, петель

Опр Матрица инцидентности (для неориентированного графа) — матрица I размера $|V|\times|E|$, для которой

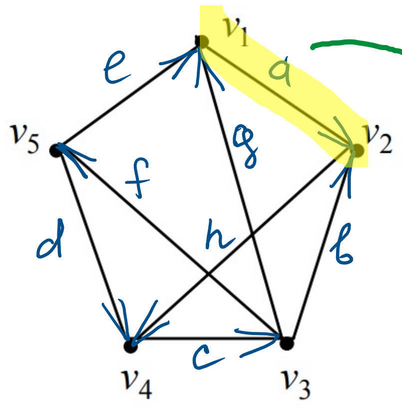
$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $I_{i_j} = 0$

Опр Матрица инцидентности (для ориентированного графа) — матрица I размера $|V|x|E|$, для которой

$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i начало дуги e_j, $I_{i_j} = -1$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $I_{i_j} = 0$



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1							
2	1							
3								
4								
5								



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1							
2	-1							
3								
4								
5								

Способы представления графа: Матрица инцидентности

Incidence matrix

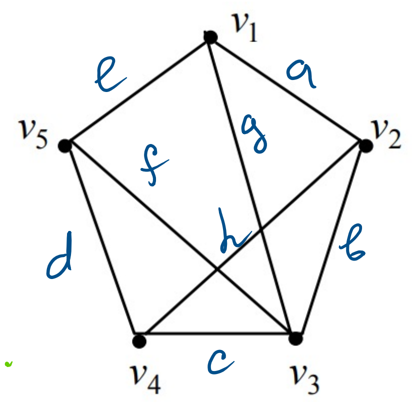
Матрица инцидентности Для простоты описания кратных ребер, петель

Опр Матрица инцидентности (для неориентированного графа) — матрица I размера $|V|\times|E|$, для которой

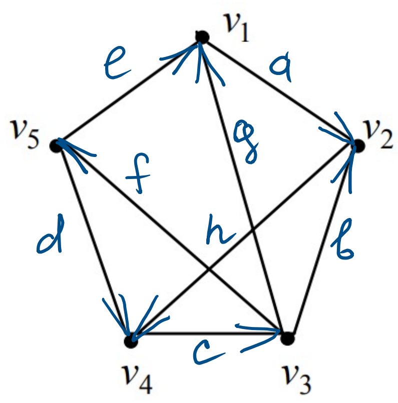
$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $I_{i_j} = 0$

Опр Матрица инцидентности (для ориентированного графа) — матрица I размера $|V|x|E|$, для которой

$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i начало дуги e_j, $I_{i_j} = -1$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $I_{i_j} = 0$



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1				1		1	
2	1	1						1
3		1	1			1	1	
4			1	1				1
5				1	1	1		



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1				-1		-1	
2	-1	-1						1
3		1	-1			1	1	
4			1	-1				-1
5				1	1	-1		

Способы представления графа: Матрица инцидентности

Incidence matrix

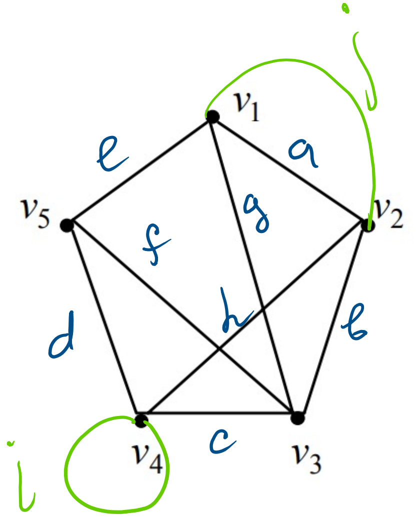
Матрица инцидентности Для простоты описания кратных ребер, петель

Опр Матрица инцидентности (для неориентированного графа) — матрица I размера $|V|\times|E|$, для которой

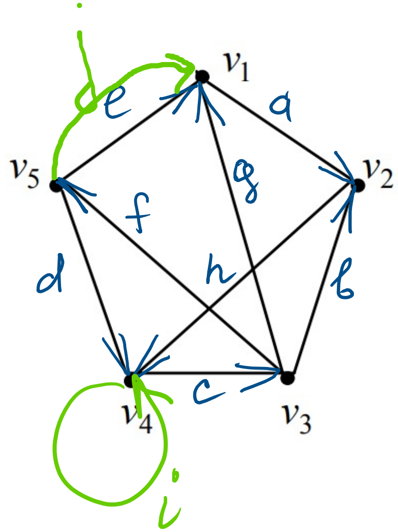
$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $I_{i_j} = 0$

Опр Матрица инцидентности (для ориентированного графа) — матрица I размера $|V|x|E|$, для которой

$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i начало дуги e_j, $I_{i_j} = -1$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $I_{i_j} = 0$



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	1				1		1			
2	1	1						1		
3		1	1			1	1			
4			1	1				1		
5				1	1	1				



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	1				-1		-1			
2	-1	-1						1		
3		1	-1			1	1			
4			1	-1				-1		
5				1	1	-1				

Способы представления графа: Матрица инцидентности

Incidence matrix

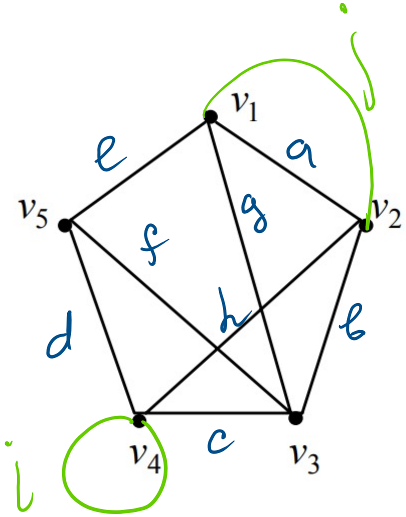
Матрица инцидентности Для простоты описания кратных ребер, петель

Опр Матрица инцидентности (для неориентированного графа) — матрица I размера $|V|\times|E|$, для которой

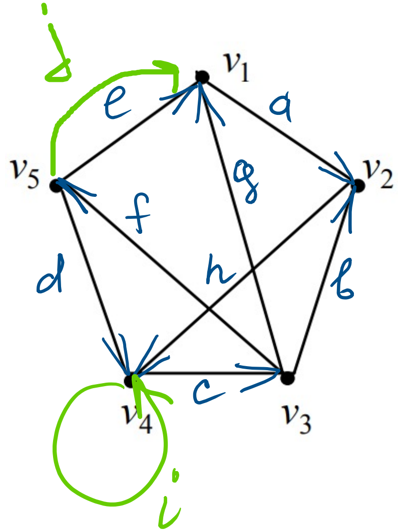
$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, иначе $I_{i_j} = 0$

Опр Матрица инцидентности (для ориентированного графа) — матрица I размера $|V|x|E|$, для которой

$I_{i_j} = 1$, если вершина v_i начало дуги e_j, $I_{i_j} = -1$, если вершина v_i конец дуги e_j, иначе $I_{i_j} = 0$



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	1				1		1			1
2	1	1						1		1
3		1	1			1	1			
4			1	1				1	2	
5				1	1	1				



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	1				-1		-1			-1
2	-1	-1						1		
3		1	-1			1	1			
4			1	-1				-1	1 -1	
5				1	1	-1				1

or 2

Способы представления графа: Матрица инцидентности

(инциденций)

Incidence matrix

Свойства матрицы инциденций:

1) В простом графе — бинарна
2) Для неориентированного — сумма элементов i-ой строки равна степени вершины
3) Количество столбцов = количество рёбер

Взвешенные графы: **вместо 1 и -1 хранит вес ребра / дуги**

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1				1		1	
2	1	1						1
3		1	1			1	1	
4			1	1				1
5				1	1	1		

$\Sigma \deg 1$

$\Sigma=2$ $\Sigma=2$

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1				-1		-1	
2	-1	-1						1
3		1	-1			1	1	
4			1	-1				-1
5				1	1	-1		

$\Sigma=0$ $\Sigma=0$

? Сумма по столбцу: 2 0

Какие ребра инцидентны вершине

ПУТИ И ЦИКЛЫ

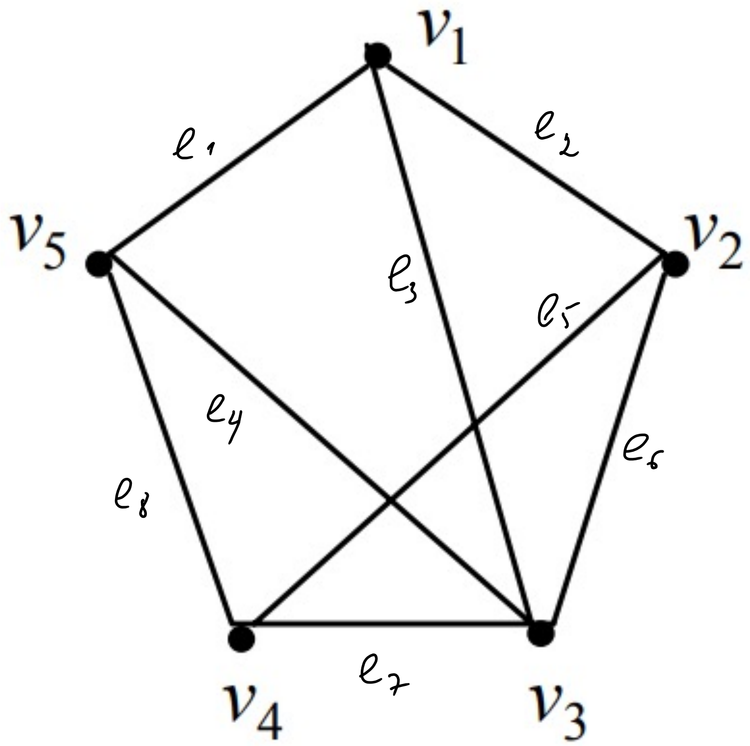
Пути

$G(V, E)$

Опр **<u>Путь</u> (маршрут)** *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$
где $e_i \in E$, $v_i \in V$
и **k** - длина пути (**число ребер** в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

обозначаем



Пути

$G(V,E)$

Опр **Путь (маршрут)** *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

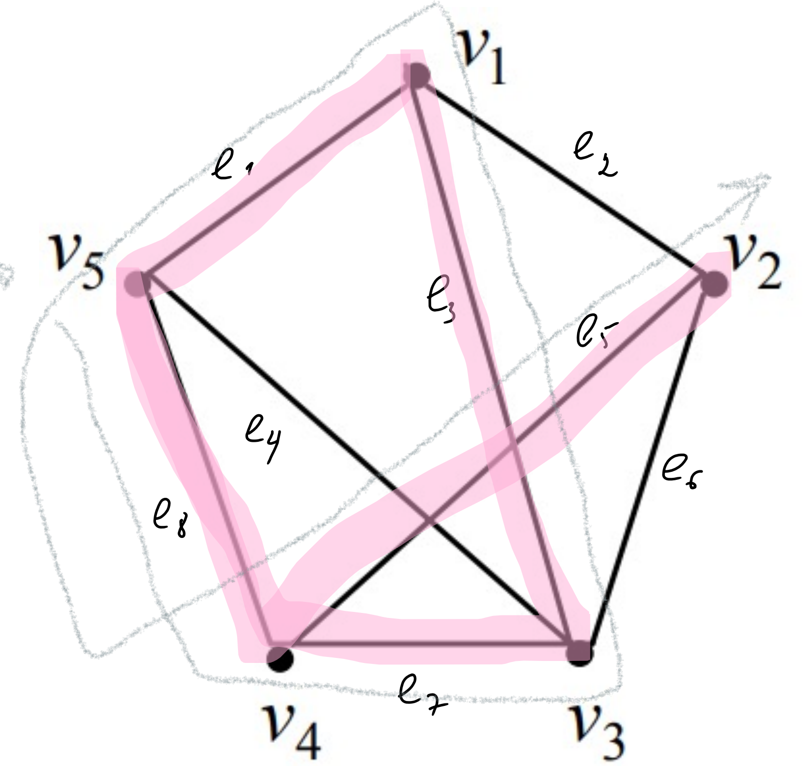
и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

обозначаем

Путь $v_5 \rightsquigarrow v_2$?

$v_5 \, e_8 \, v_4 \, e_7 \, v_3 \, e_3 \, v_1 \, e_1 \, v_5 \, e_8 \, v_4 \, e_5 \, v_2$



Пути

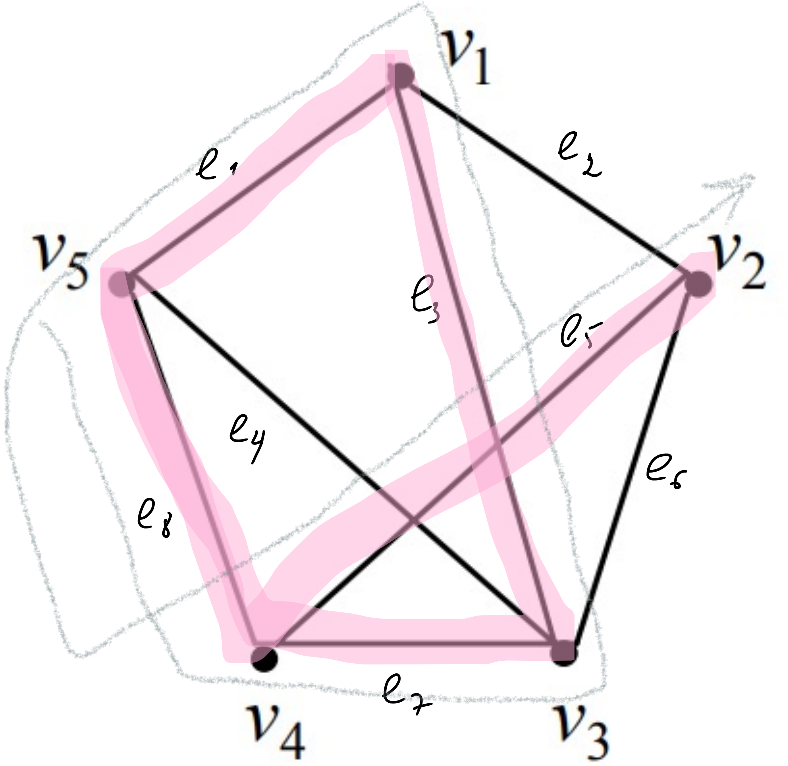
$G(V,E)$

Опр **<u>Путь</u> (маршрут)** *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$ ← обозначаем



Путь $v_5 \rightsquigarrow v_2$!

$v_5 \overset{1}{e_8} v_4 \overset{2}{e_7} v_3 \overset{3}{e_3} v_1 \overset{4}{e_1} v_5 \overset{5}{e_8} v_4 \overset{6}{e_5} v_2$

v_5 и v_4 - повтор-ся

e_8 - два раза

Длина пути $v_5 \rightsquigarrow v_2 = 6$

Пути

$G(V, E)$

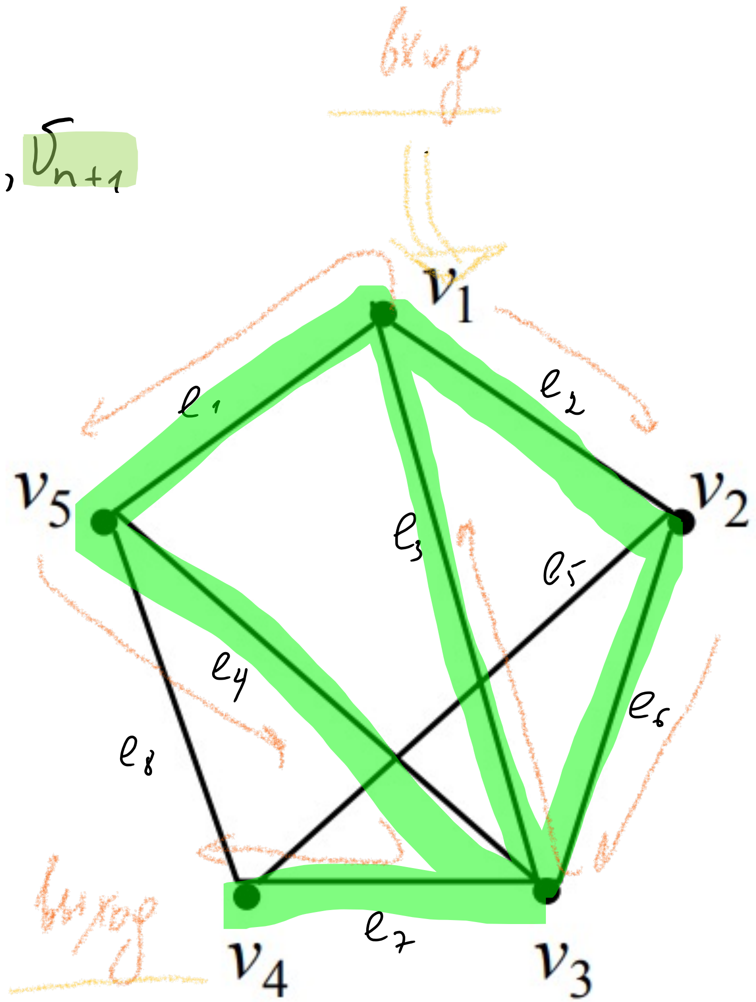
Опр **<u>Путь</u> (маршрут)** *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$ обозначаем

рассмотрим путь $v_1 \rightsquigarrow v_4$!



Пути

$G(V, E)$

Опр **<u>Путь</u> (маршрут)** *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

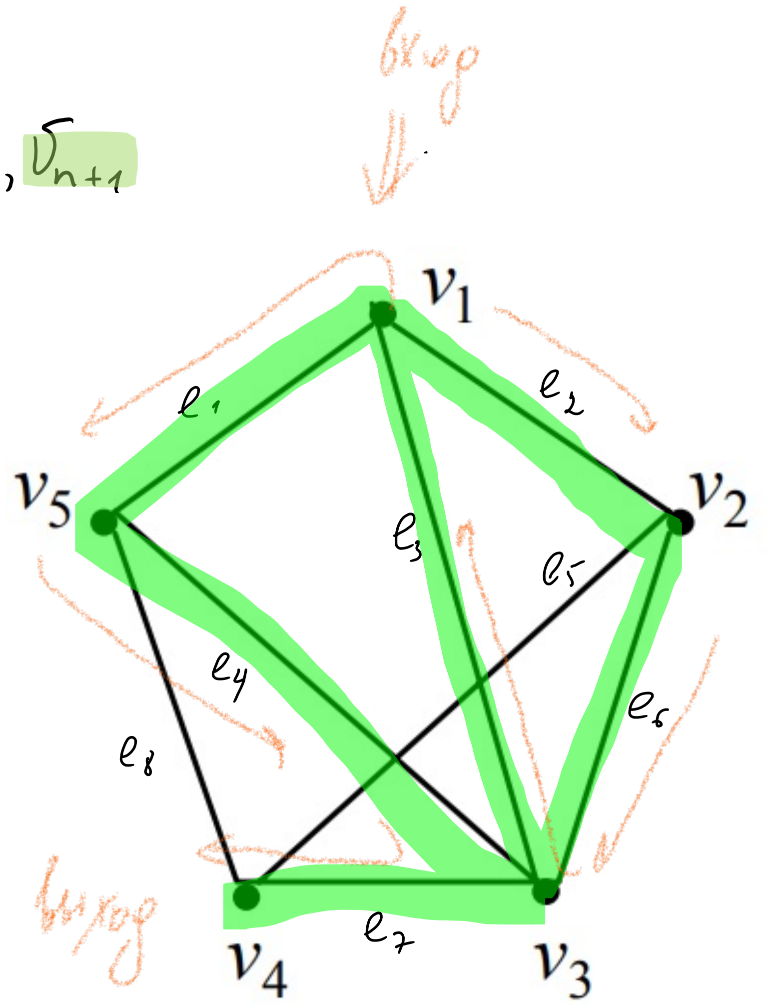
$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$ обозначаем

рассмотрим путь $v_1 \rightsquigarrow v_4$!

$v_1\, e_2\, v_2\, e_6\, v_3\, e_3\, v_1\, e_1\, v_5\, e_4\, v_3\, e_7\, v_4$

v_1 – повтор-ся

длина пути $v_1 \rightsquigarrow v_4 = 6$ (без повторений ребер)



Пути

$G(V, E)$

Опр **<u>Путь</u> (маршрут)** *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

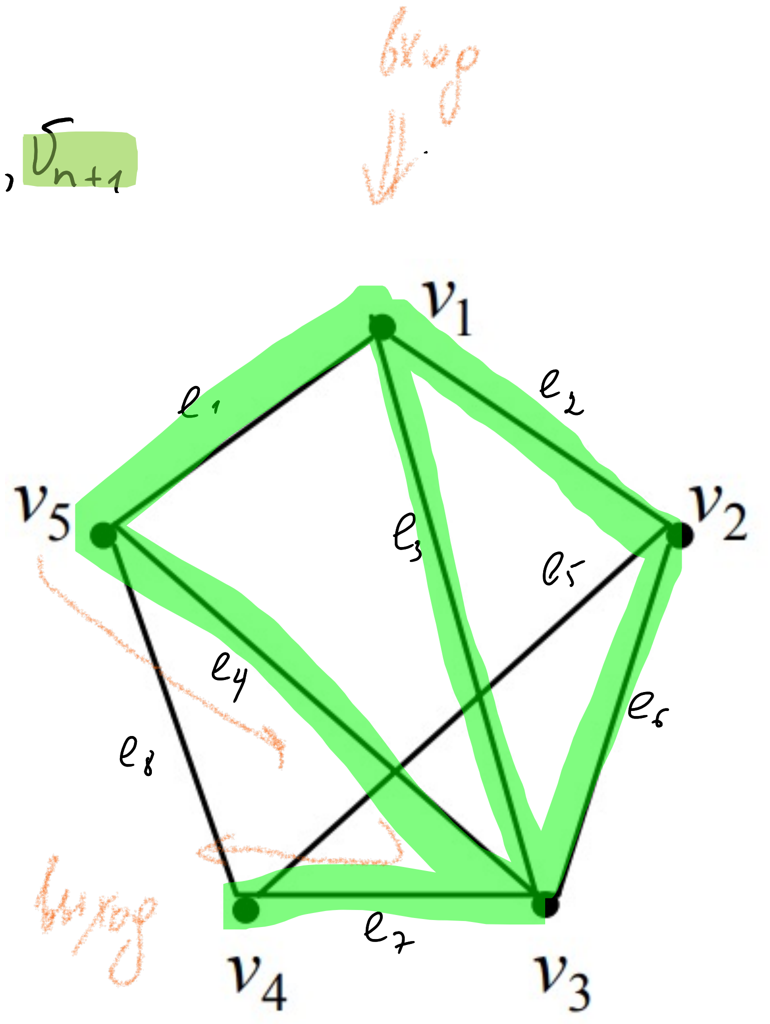
обозначаем

Опр **<u>Цепь</u>** *Trail* — путь без повторяющихся ребер

путь $v_1 \rightsquigarrow v_4$ = цепь

$v_1\, e_2\, v_2\, e_6\, v_3\, e_3\, v_1\, e_1\, v_5\, e_4\, v_3\, e_7\, v_4$

v_1 – повтор-ся



Пути

$G(V, E)$

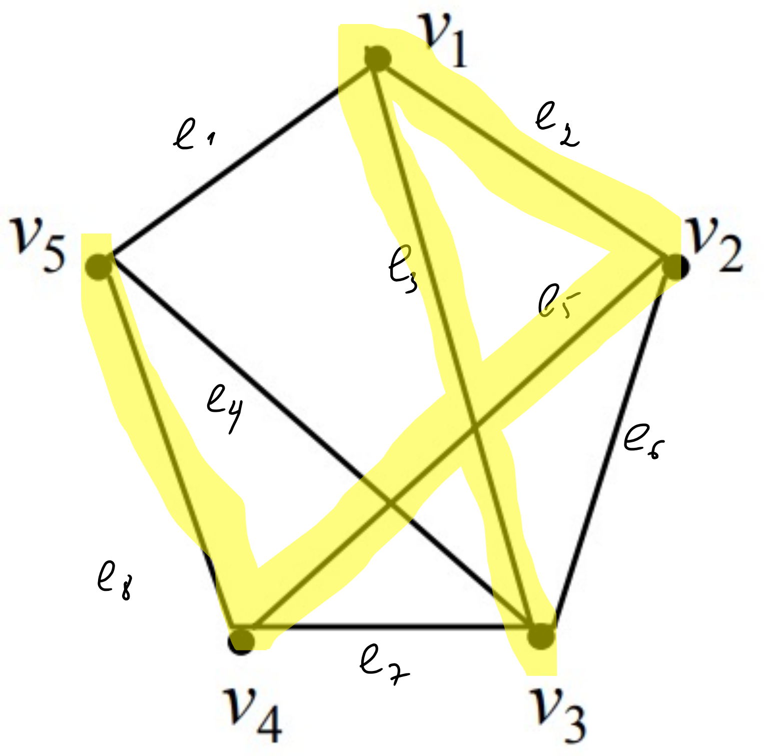
Опр **Путь (маршрут)** *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$ обозначаем

Опр **Цепь** *Trail* — путь без повторяющихся ребер



Опр **Простая цепь** *Path* — цепь без повторяющихся вершин (а следовательно и ребер)

путь $v_5 \rightsquigarrow v_3$ — простая цепь

$v_5 e_8 v_4 e_5 v_2 e_2 v_1 e_3 v_3$

можно записать так $v_5 \rightsquigarrow v_3$: $v_5 v_4 v_2 v_1 v_3$

Пути и циклы $G(V,E)$

Опр Путь (маршрут) *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E,\ v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

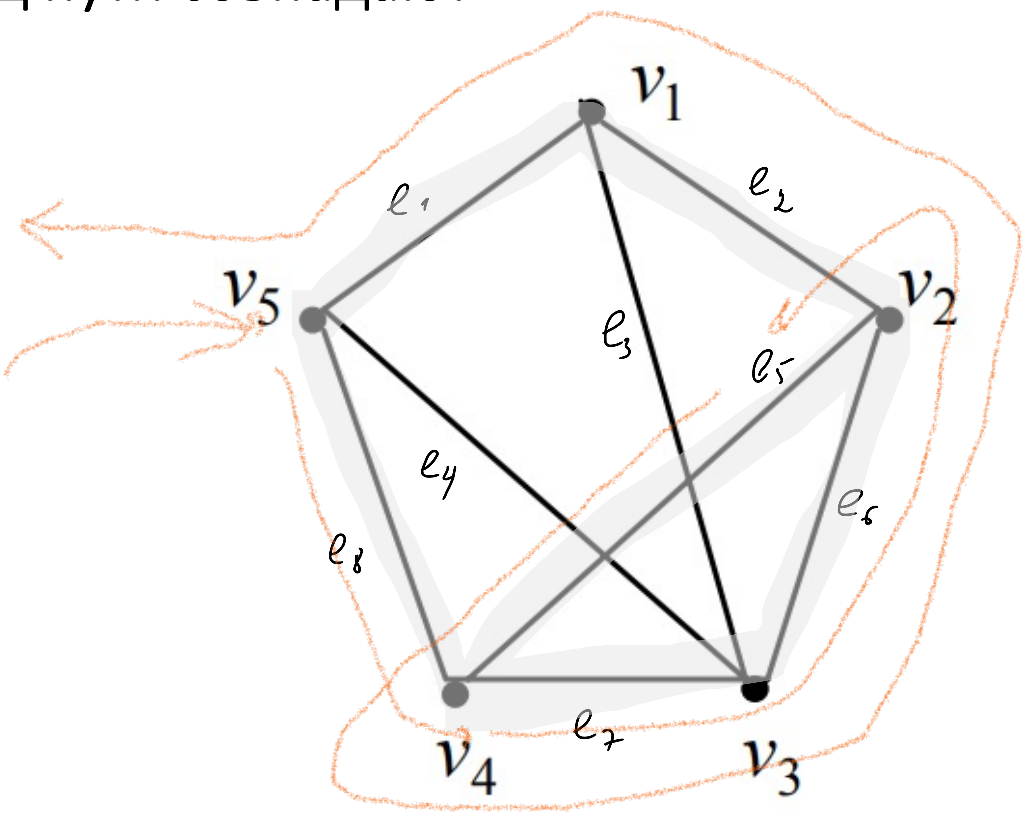
$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

Опр **Замкнутый путь** *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае)

путь $v_5 \rightsquigarrow v_5$ - замкнутый.

$v_5 - v_4\ v_3\ v_2\ v_4\ v_3\ v_2\ v_1\ v_5$

(обозначение без ребер



Пути и циклы $G(V,E)$

Опр Путь (маршрут) *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

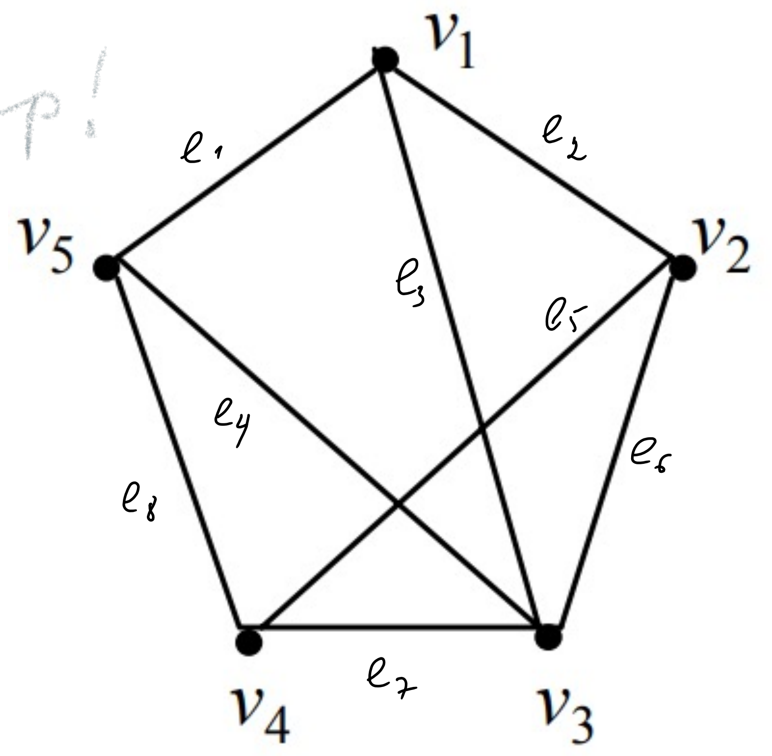
$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

Опр **Замкнутый путь** *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае)

Опр **Цикл** *Circuit* — замкнутая цепь

без повторения ребер!

путь $v_4 \rightsquigarrow v_4$



Пути и циклы $G(V,E)$

Опр Путь (маршрут) *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

Опр **Замкнутый путь** *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае)

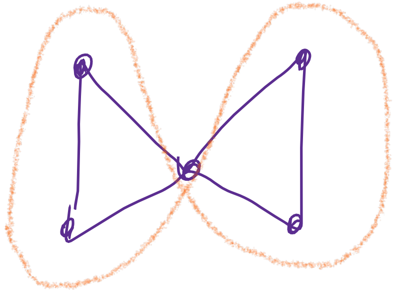
Опр Цикл *Circuit* — замкнутая цепь

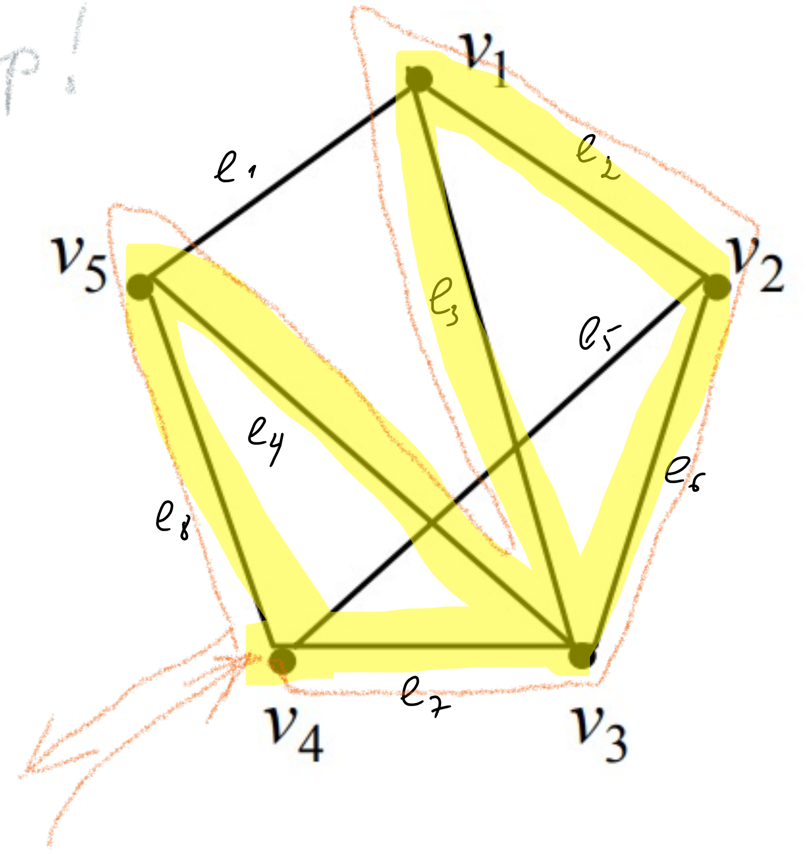
без повторения ребер!

путь $v_4 \rightsquigarrow v_4$;

$v_4 v_3 v_2 v_1 v_3 v_5 v_4$ цикл

типовой цикл





Пути и циклы $G(V, E)$

Опр Путь (маршрут) *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E$, $v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

Опр **Замкнутый путь** *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае)

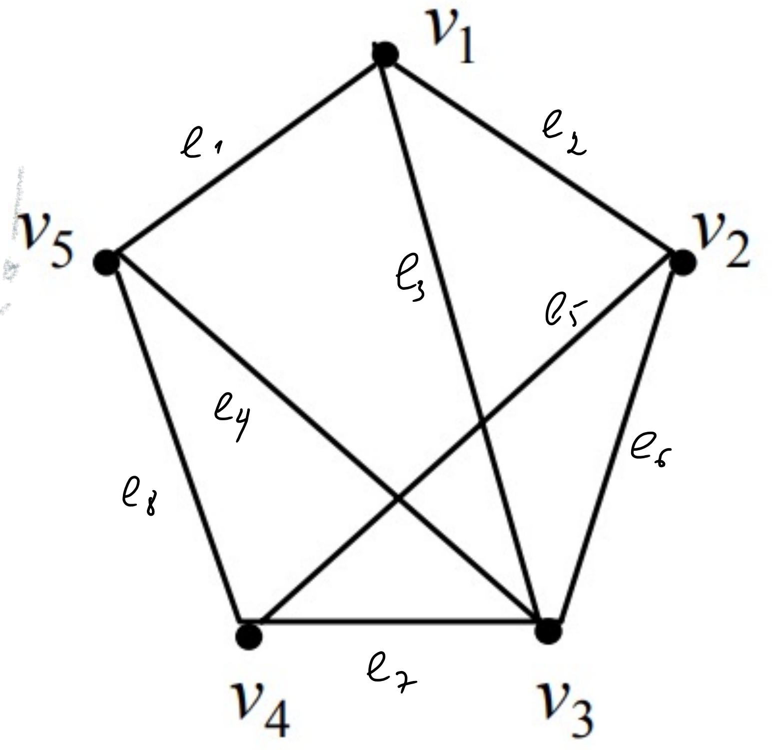
Опр **Цикл** *Circuit* — замкнутая цепь

Опр **Простой цикл** *Cycle* — замкнутая простая цепь $n \geq 3$

→ без повтора
+ ребер
+ вершин

рассмотрим

$v_5\, v_4\, v_3\, v_1\, v_5$ → простой цикл



Пути и циклы $G(V, E)$

Опр Путь (маршрут) *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_n, e_n, v_{n+1}$

где $e_i \in E,\ v_i \in V$

и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$

Опр **Замкнутый путь** *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае)

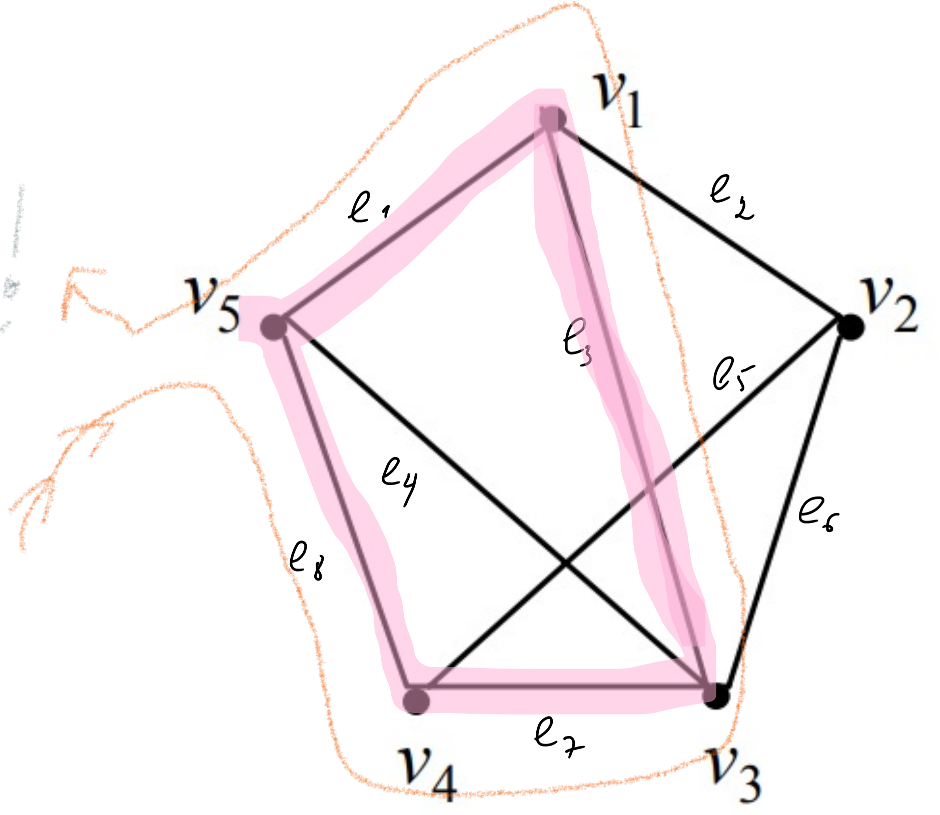
Опр **Цикл** *Circuit* — замкнутая цепь

Опр **Простой цикл** *Cycle* — замкнутая простая цепь $n \geq 3$

→ без повтора
→ ребер
→ вершин !

рассмотрим

$v_5 - v_4\ v_3\ v_1\ v_5$ → простой цикл



Циклы

Опр **Замкнутый путь** *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае)

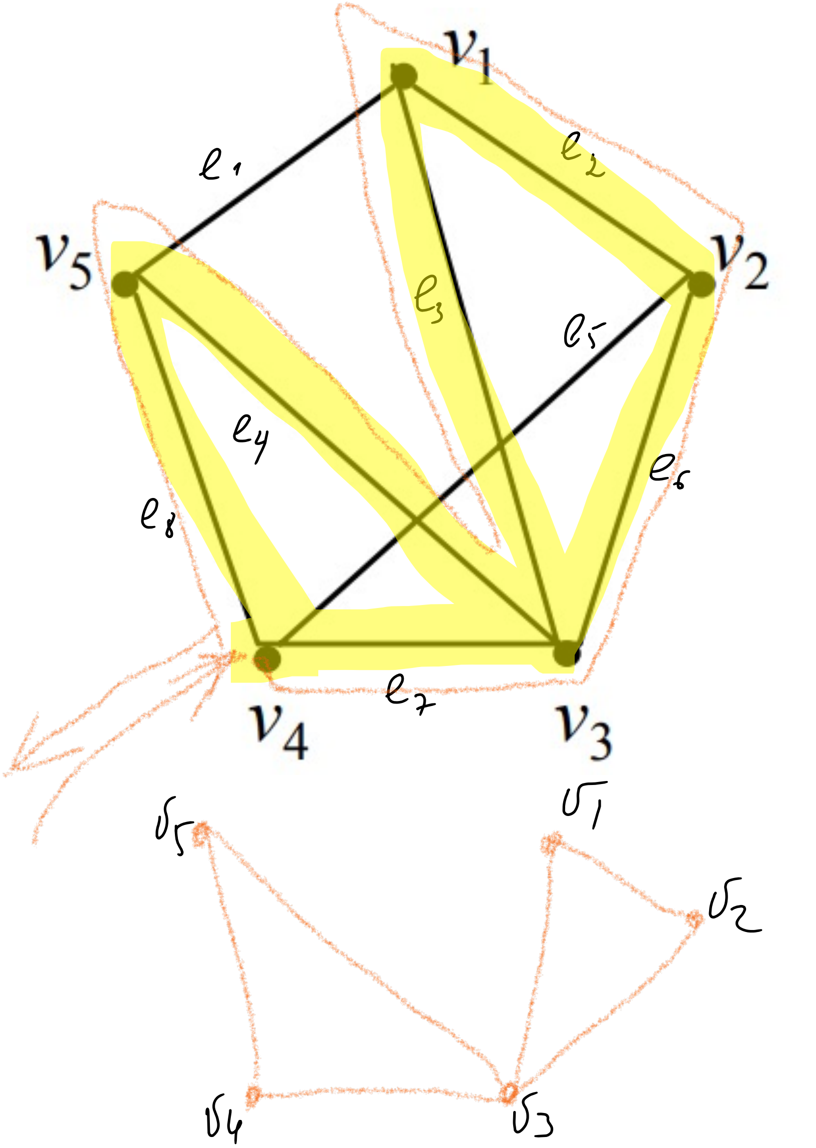
Опр **Цикл** *Circuit* — замкнутая цепь

Опр **Простой цикл** *Cycle* — замкнутая простая цепь $n \geq 3$

цикл $v_4 v_3 v_2 v_1 v_3 v_5 v_4$

содержит два простых цикла

$v_3 v_5 v_4 v_3$ и $v_3 v_2 v_1 v_3$



Циклы

Опр **Замкнутый путь** *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае)

Опр **Цикл** *Circuit* — замкнутая цепь

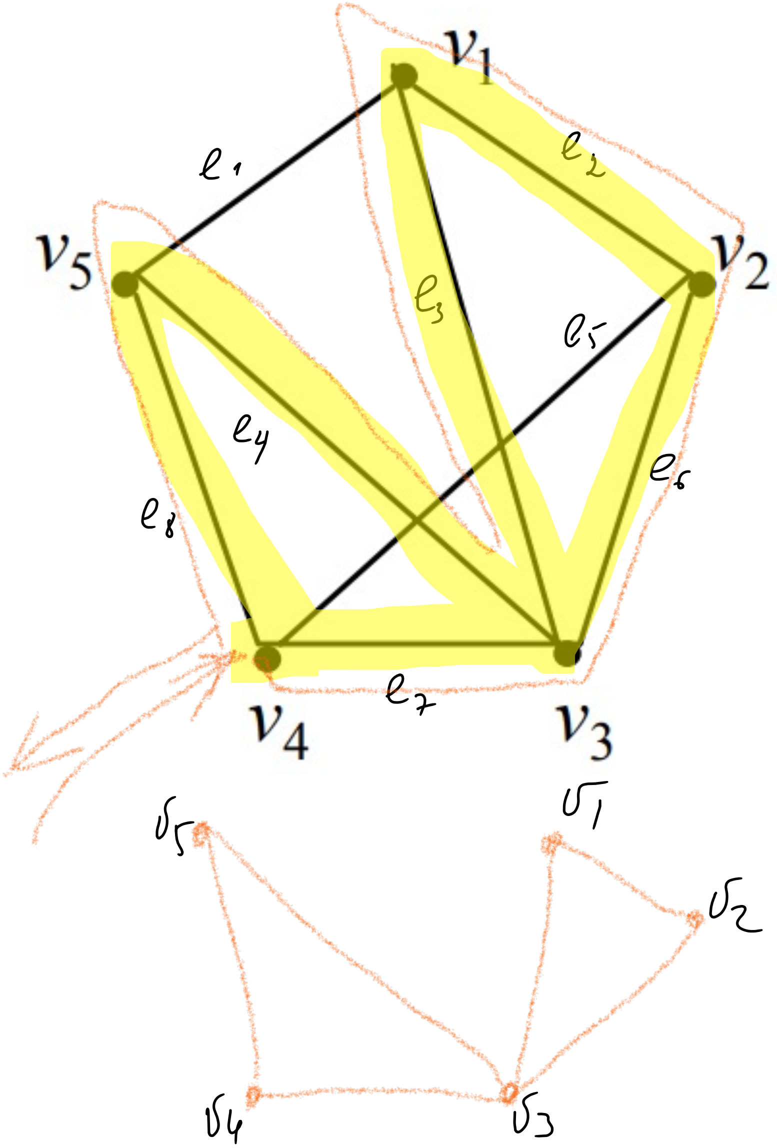
Опр **Простой цикл** *Cycle* — замкнутая простая цепь $n \geq 3$

цикл $v_4 v_3 v_2 v_1 v_3 v_5 v_4$

содержит два простых цикла

$v_3 v_5 v_4 v_3$ и $v_3 v_2 v_1 v_3$

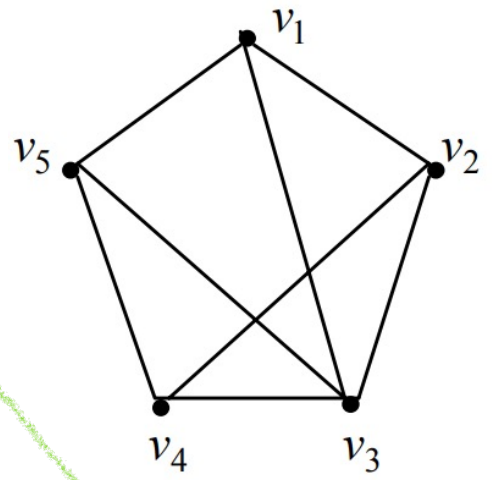
Замкн. путь $\supseteq$ цикл $\supseteq$ простой цикл !



Пути и циклы $G(V, E)$

Опр Путь (маршрут) *Walk* — последовательность вида $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_n, e_n, v_{n+1}$
где $e_i \in E$, $v_i \in V$
и k - длина пути (число ребер в нем)

$v_1 \rightsquigarrow v_{n+1}$



Опр Цепь *Trail* — путь без повторяющихся ребер

Опр Простая цепь *Path* — цепь без повторяющихся вершин (а следовательно и ребер)

Опр Замкнутый путь *Closed walk* — начало и конец пути совпадают (Открытый в противном случае) $v_1 = v_{n+1}$

Опр Цикл *Circuit* — замкнутая цепь

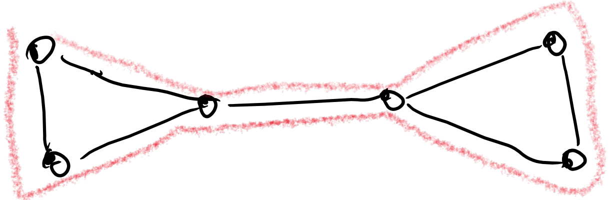
wiki: non-empty trail

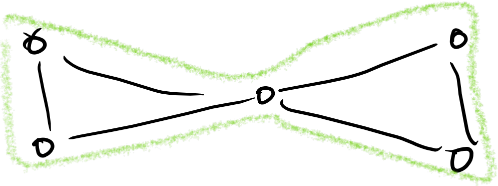
Опр Простой цикл *Cycle* — замкнутая простая цепь $n \geq 3$

Хорды

Опр **Реберно-простой путь** — путь, в котором каждое из ребер графа встречается не более одного раза = **цепь** Trail

Вершинно-простой путь — путь, в котором каждая из вершин графа встречается не более одного раза = **простая цепь** Path

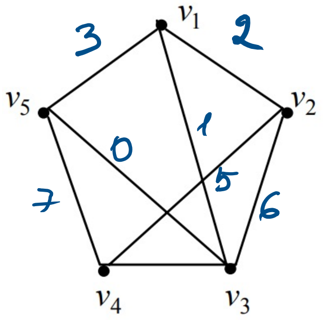




КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ
ЧАСТЬ 2

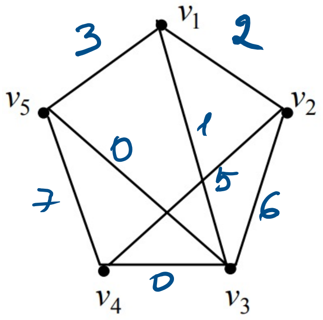
Введение в теорию графов

Опр <u>Взвешенный граф</u> — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network



Введение в теорию графов

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network

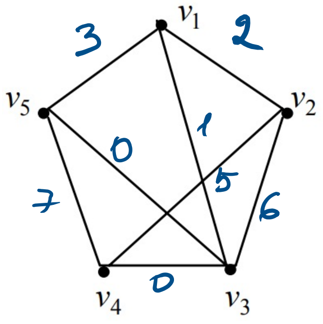


Опр **<u>Тривиальный граф</u>** — граф из одной вершины (1, 0)

Trivial graph

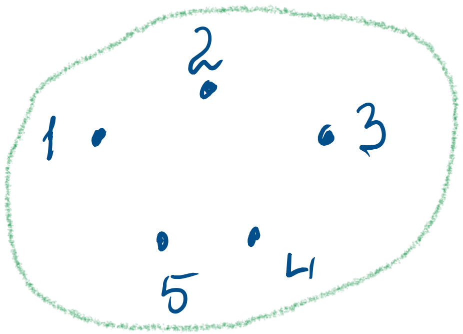
Введение в теорию графов

Опр Взвешенный граф — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network



Опр Тривиальный граф — граф из одной вершины (1, 0)
Trivial graph

Опр Нуль граф — граф без ребер
Edgeless graph

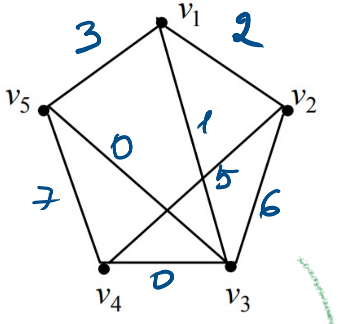


$= O_n$

Введение в теорию графов

Опр **Взвешенный граф** — граф с весами на ребрах

Weighted graph or a Network

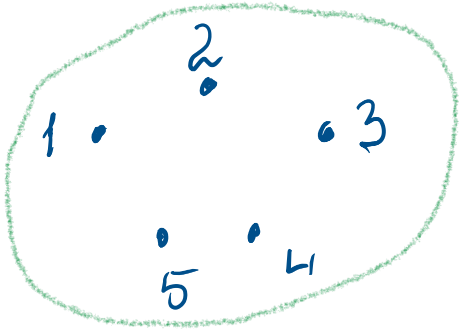


Опр **Тривиальный граф** — граф из одной вершины (1, 0)

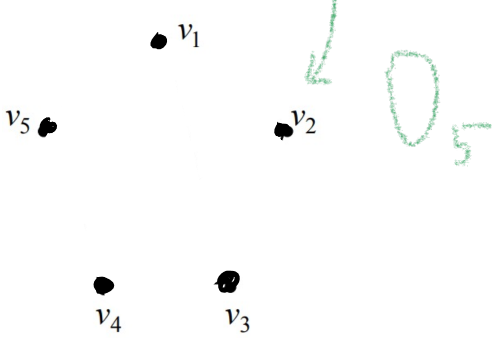
Trivial graph

Опр **Нуль граф** — граф без ребер

Edgeless graph

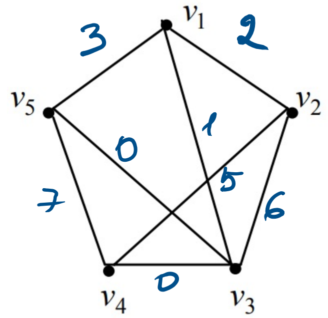


$= O_n$



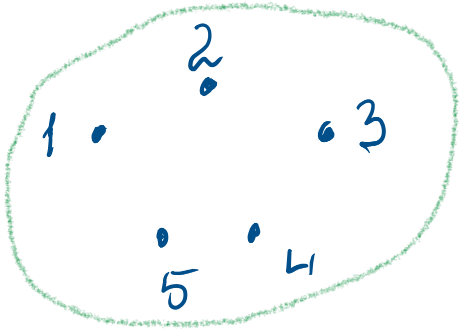
Введение в теорию графов

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network



Опр **<u>Тривиальный граф</u>** — граф из одной вершины (1, 0)
Trivial graph

Опр **<u>Нуль граф</u>** — граф без ребер
Edgeless graph



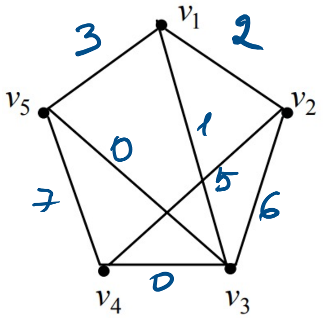
$= O_n$

Опр **<u>Пустой граф</u>** — граф без вершин
Null or Empty graph

$\varnothing$

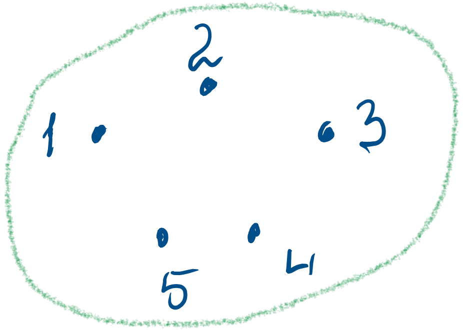
Введение в теорию графов

Опр **Взвешенный граф** — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network



Опр **Тривиальный граф** — граф из одной вершины (1, 0)
Trivial graph

Опр **Нуль граф** — граф без ребер
Edgeless graph



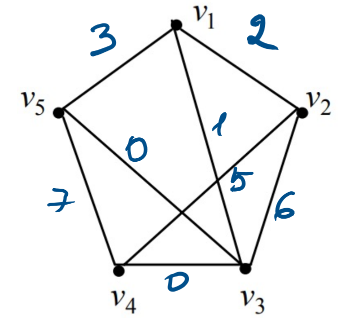
$= O_n$

Опр **Пустой граф** — граф без вершин
Null or Empty graph

у Харари НЕТ такого

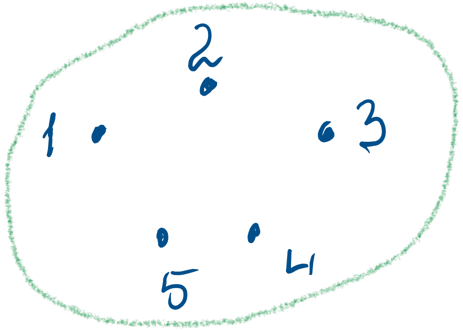
Введение в теорию графов

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network



Опр **<u>Тривиальный граф</u>** — граф из одной вершины (1, 0)
Trivial graph

Опр **<u>Нуль граф</u>** — граф без ребер
Edgeless graph



$= O_n$

Опр **<u>Пустой граф</u>** — граф без вершин
Null or Empty graph

у Харари НЕТ такого

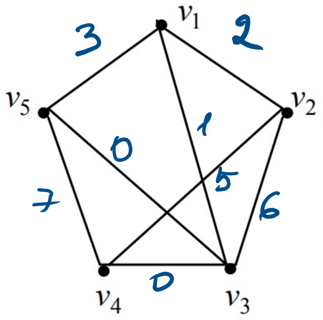
$\varnothing$

Опр **<u>Двудольный граф</u>** — это граф, множество вершин которого можно так разбить на два непересекающихся подмножества (доли) V_1 и V_2 , что никакие две вершины из одной доли не смежны
*Bipartite graph or **Bigraph***

$\boxed{G_{nm}}$

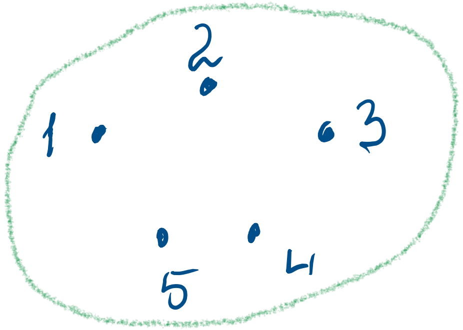
Введение в теорию графов

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network



Опр **<u>Тривиальный граф</u>** — граф из одной вершины (1, 0)
Trivial graph

Опр **<u>Нуль граф</u>** — граф без ребер
Edgeless graph



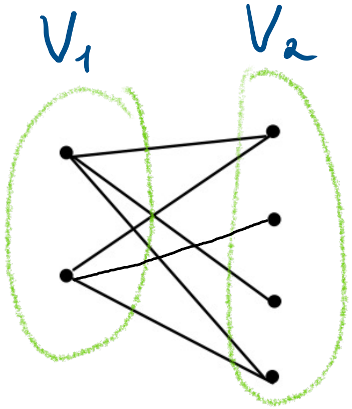
$= O_n$

Опр **<u>Пустой граф</u>** — граф без вершин
Null or Empty graph

у Харари НЕТ такого

Опр **<u>Двудольный граф</u>** — это граф, множество вершин которого можно так разбить на два непересекающихся подмножества (доли) V_1 и V_2, что никакие две вершины из одной доли не смежны
Bipartite graph or ***Bigraph***

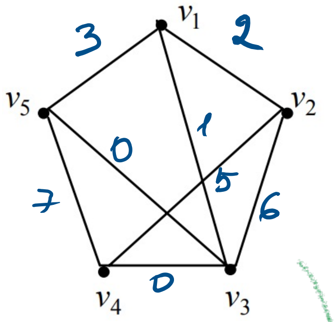
$\boxed{G_{nm}}$



$G_{2,4}$

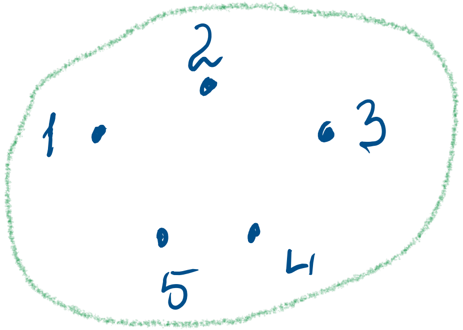
Введение в теорию графов

Опр **<u>Взвешенный граф</u>** — граф с весами на ребрах
Weighted graph or a Network

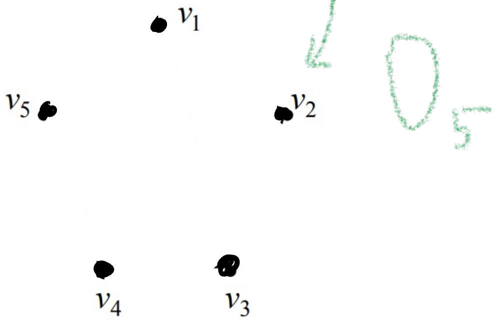


Опр **<u>Тривиальный граф</u>** — граф из одной вершины (1, 0)
Trivial graph

Опр **<u>Нуль граф</u>** — граф без ребер
Edgeless graph



$= O_n$



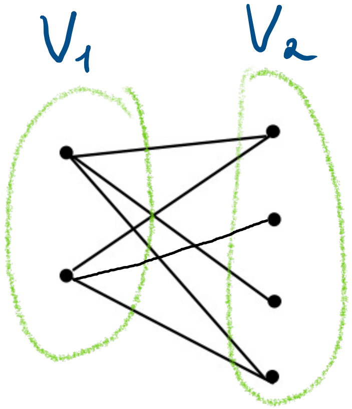
Опр **<u>Пустой граф</u>** — граф без вершин
Null or Empty graph

у Харари НЕТ такого

$\varnothing$

Опр **<u>Двудольный граф</u>** — это граф, множество вершин которого можно так разбить на два непересекающихся подмножества (доли) V_1 и V_2 , что никакие две вершины из одной доли не смежны
Bipartite graph or ***Bigraph***

G_{nm}



$G_{2,4}$

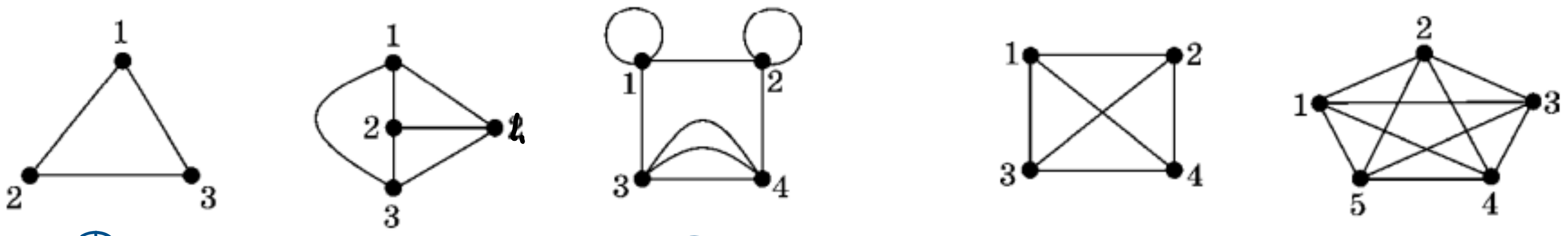
КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ ЧАСТЬ 3

Полнота и регулярность

Опр **Однородный (регулярный) граф** — степени всех его вершин равны

Regular graph

обознач → R_k, k – степень



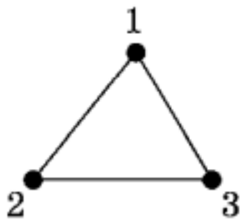
$R_?$ $R_?$ $R_?$ $R_?$ $R_?$

Полнота и регулярность

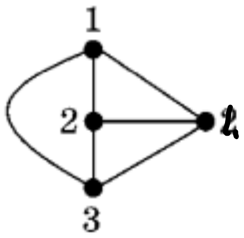
Опр **<u>Однородный (регулярный) граф</u>** — степени всех его вершин равны

Regular graph

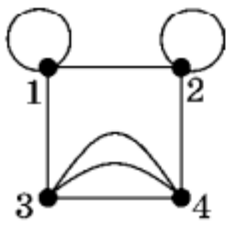
обознач → R_k, k – степень



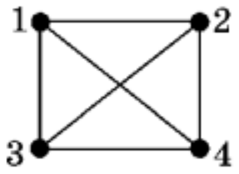
R_2



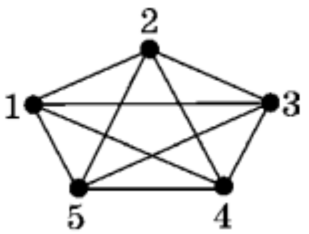
R_3



R_4



R_3



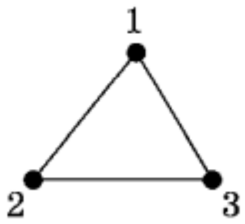
R_4

Полнота и регулярность

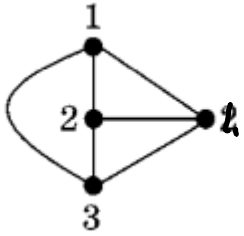
Опр **<u>Однородный (регулярный) граф</u>** — степени всех его вершин равны

Regular graph

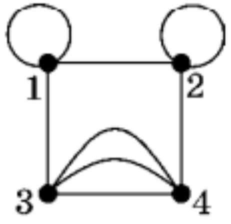
обознач R_k, k – степень



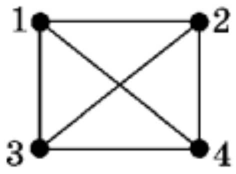
R_2



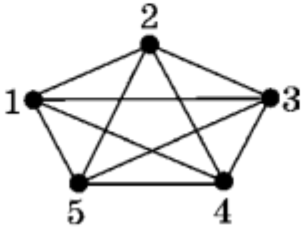
R_3



R_4



R_3



R_4

!

$$|E| = \frac{n \cdot k}{2}$$

, n – число вершин

Полнота, регулярность и операции над графами

Опр **Полный граф** — простой граф с максимальной степенью вершин
Complete graph

обозн $\boxed{K_n}$, n - кол-во вершин

$\boxed{K_{n,m}}$, полный двудольный $\begin{cases} n = |V_1| \\ m = |V_2| \end{cases}$

Полнота, регулярность и операции над графами

Опр <u>Полный граф</u> — простой граф с максимальной степенью вершин

Complete graph

max

обозн

$\boxed{K_n}$, n - кол-во вершин

$\boxed{K_{n\,m}}$, полный двудольный $\begin{cases} n = |V_1| \\ m = |V_2| \end{cases}$

$\deg v_i = n-1$

$\Downarrow$

$|E|: \sum \deg = 2|E|$

Полнота, регулярность и операции над графами

Опр **<u>Полный граф</u>** — простой граф с максимальной степенью вершин

Complete graph

max

обозн

$\boxed{K_n}$, n - кол-во вершин

$\boxed{K_{n,m}}$, полный двудольный $\begin{cases} n = |V_1| \\ m = |V_2| \end{cases}$

$\deg v_i = n - 1$

$|E|: \sum \deg = 2|E| \Rightarrow |E| = \dfrac{\sum \deg}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

В Полном графе каждая пара вершин смежная

Полнота, регулярность и операции над графами

Опр **Полный граф** — простой граф с максимальной степенью вершин

Complete graph

max

$\deg v_i = n-1$

обозн

$\boxed{K_n}$, n - кол-во вершин

$\boxed{K_{n\,m}}$, полный двудольный $\begin{cases} n = |V_1| \\ m = |V_2| \end{cases}$

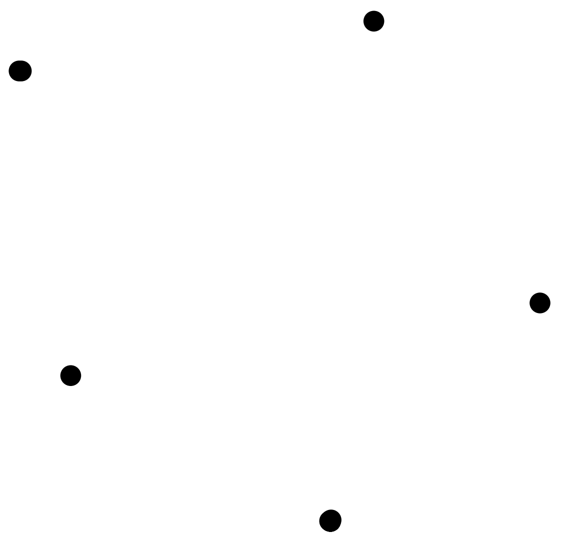
$|E|: \sum \deg = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{\sum \deg}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

В Полном графе каждая пара вершин смежная

$$\boxed{K_n = \underline{\text{регул}} = R_{n-1}}$$!

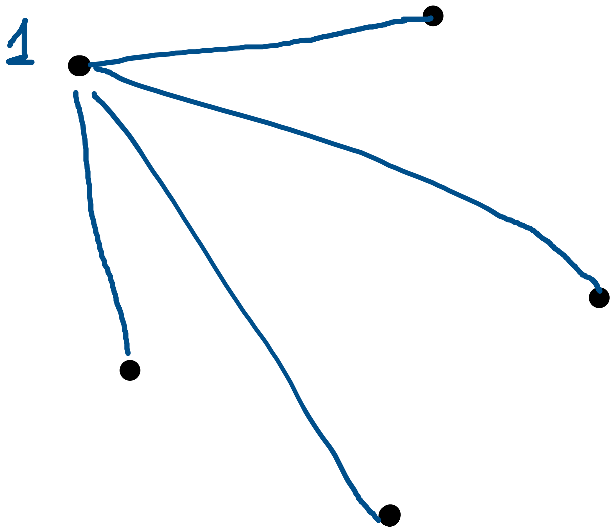
Пример полных графов

$n = 5 \Rightarrow K_5$

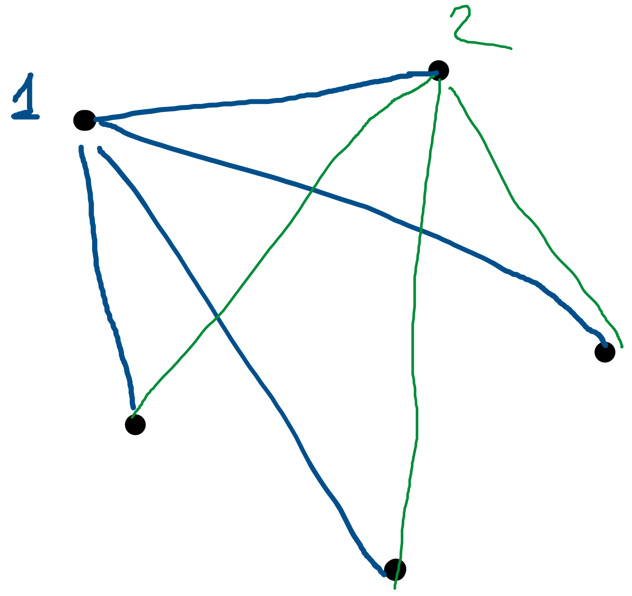


Пример полных графов

$n = 5 \Rightarrow K_5$

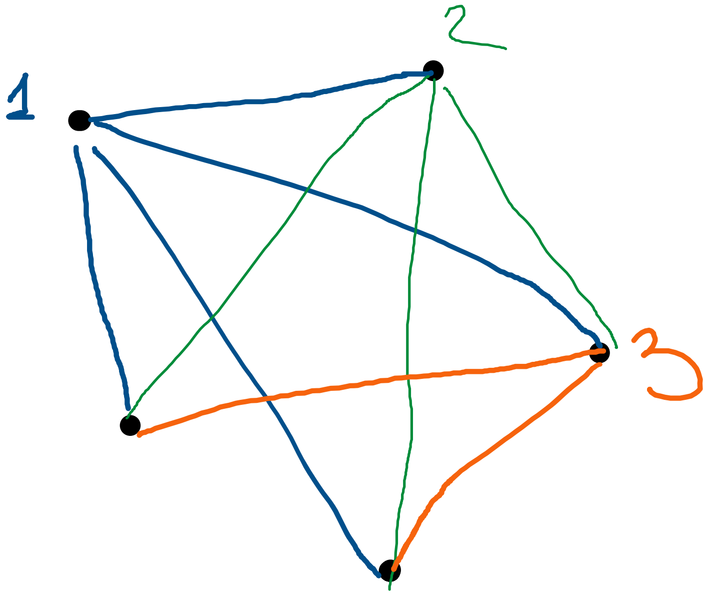


Пример полных графов



$n = 5 \Rightarrow K_5$

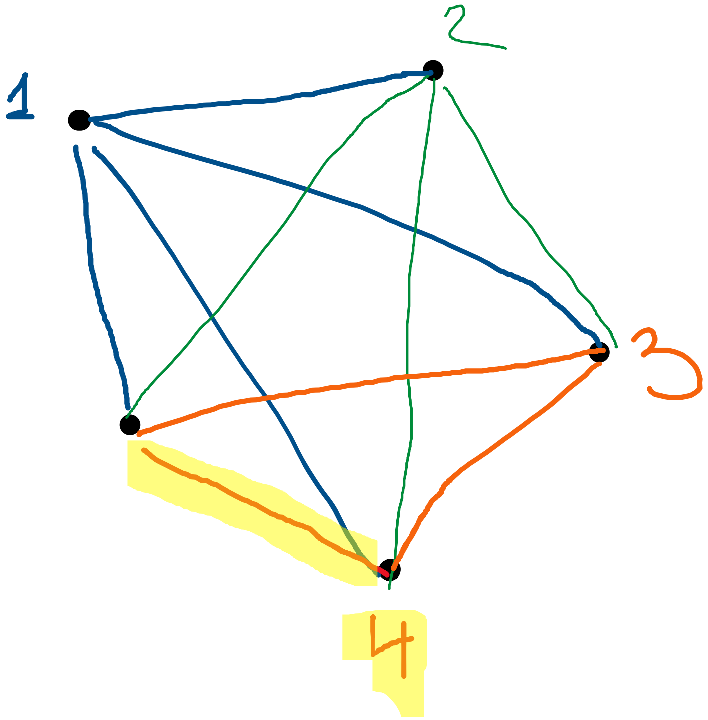
Пример полных графов



$n = 5 \Rightarrow K_5$

Пример полных графов

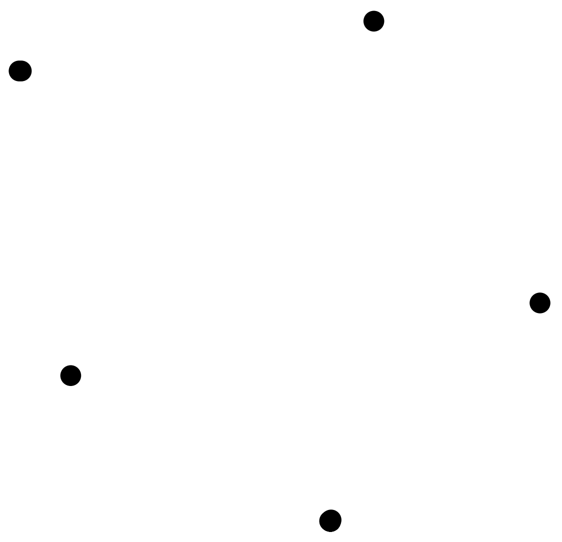
$n = 5 \Rightarrow K_5$



получили K_5

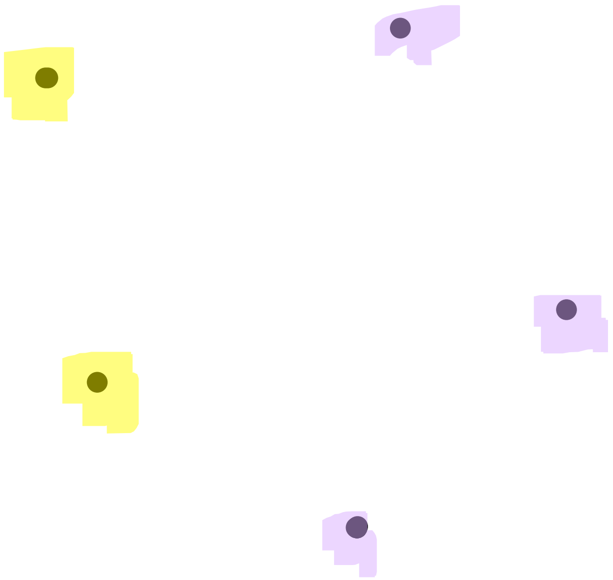
Пример полных графов

$n=2,\ m=3 \Rightarrow K_{2,3}$



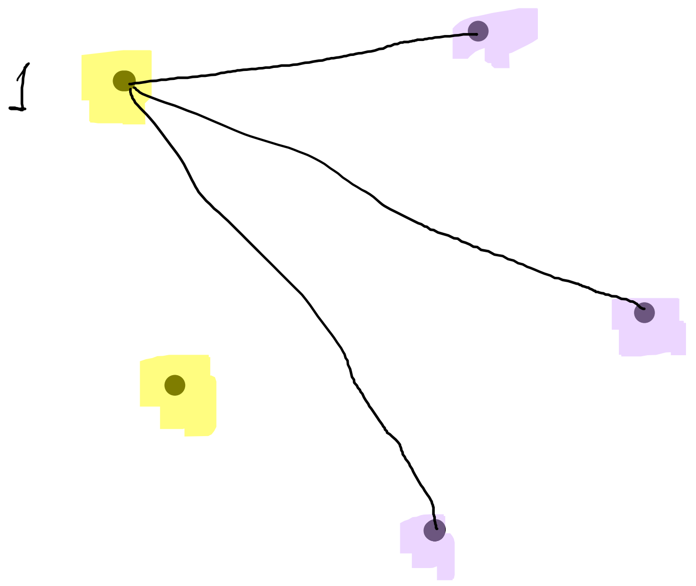
Пример полных графов

$n=2,\ m=3 \Rightarrow K_{2,3}$

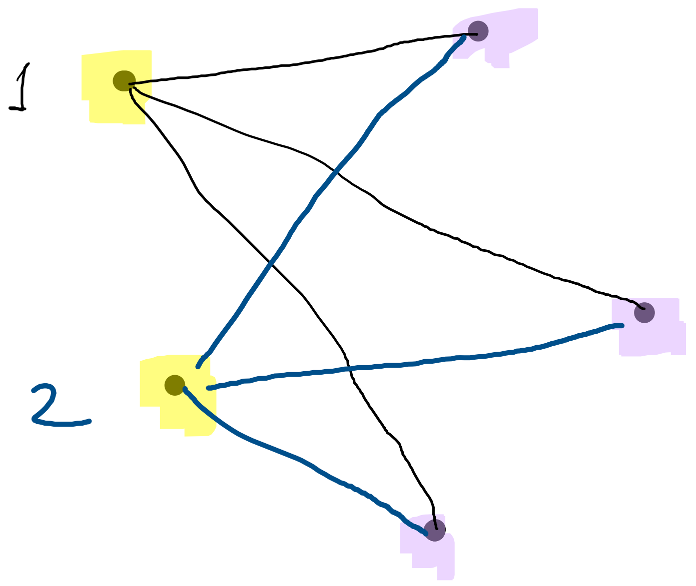


Пример полных графов

$n = 2, m = 3 \Rightarrow K_{2,3}$



Пример полных графов



$n=2,\ m=3 \Rightarrow K_{2,3}$

получили $K_{2,3}$!

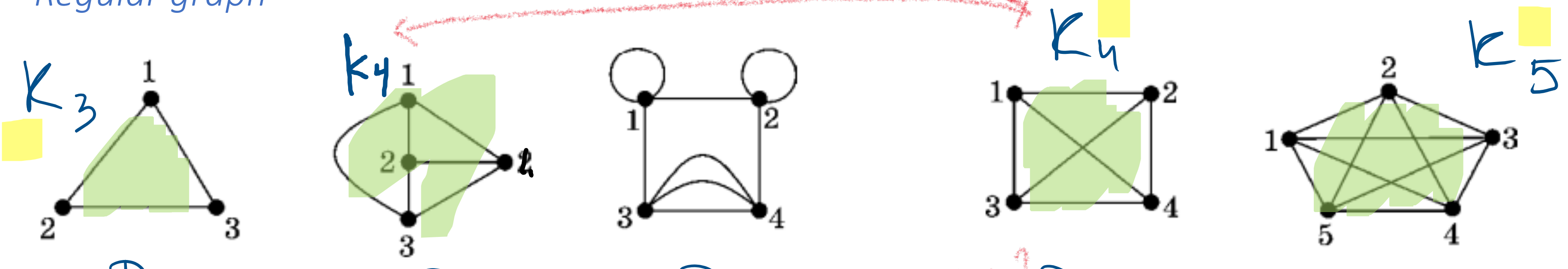
Полнота и регулярность

Опр **Однородный (регулярный) граф** — степени всех его вершин равны

Regular graph

R_k, k – степень

$|E| = \frac{n \cdot k}{2}$



Опр **Полный граф** — простой граф с максимальной степенью вершин

Complete graph

K_n, n - кол-во вершин
полный

$K_{n,m}$ двудольный

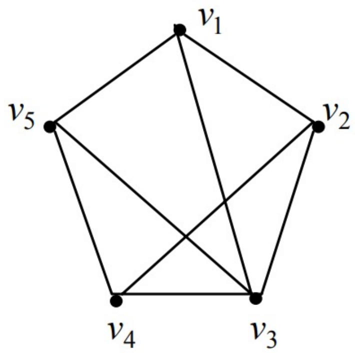
$$|E(K_n)| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$K_n = R_{n-1}$$

Операции над графами

Опр **<u>Дополнение графа до полного</u>** — добавляет в исходный граф ребра до полного и удаляет ребра исходного
Complement or inverse

$G(V, E)$
$\overline{G}(V, K \setminus E)$
K – ребра $K_{|V|}$



Операции над графами

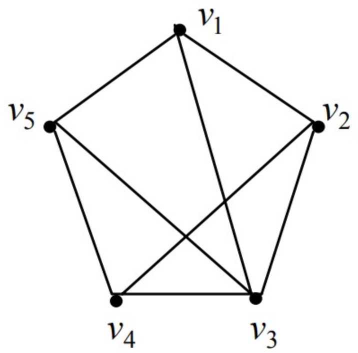
Опр Дополнение графа до полного — добавляет в исходный граф ребра до полного и удаляет ребра исходного

Complement or inverse

$G(V, E)$

$\overline{G}(V, K \setminus E)$

K – ребра $K_{|5|}$



$n = 5$

Дополним до K_5

Операции над графами

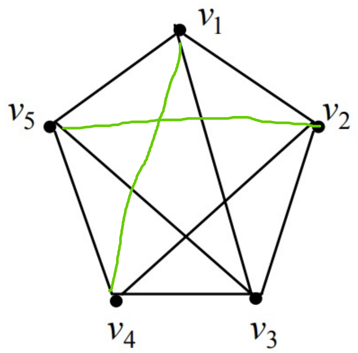
Опр **Дополнение графа до полного** — добавляет в исходный граф ребра до полного и удаляет ребра исходного

Complement or inverse

$G(V, E)$

$\overline{G}(V, K \setminus E)$

K – ребра $K_{|5|}$



$n = 5$

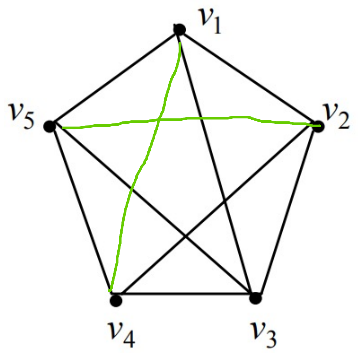
Дополним до K_5

Операции над графами

Опр **Дополнение графа до полного** — добавляет в исходный граф ребра до полного и удаляет ребра исходного

Complement or inverse

$G(V, E)$
$\overline{G}(V, K \setminus E)$
K - ребра $K_{|5|}$



$n=5$

Дополним до K_5

def:

получим $\overline{G_5}$ (дополнительный $\overline{G_k}$ граф)

Операции над графами

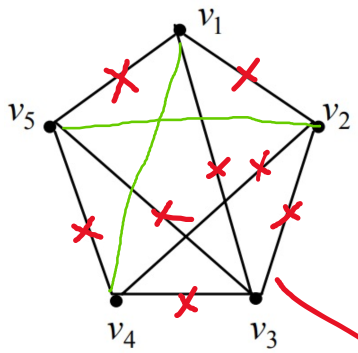
Опр **<u>Дополнение графа до полного</u>** — добавляет в исходный граф ребра до полного и удаляет ребра исходного

Complement or inverse

$G(V, E)$

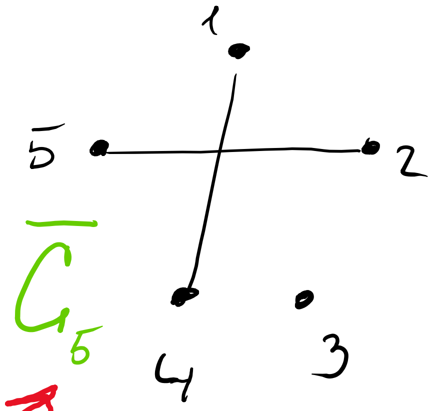
$\overline{G}(V, K \setminus E)$

K – ребра $K_{|5|}$

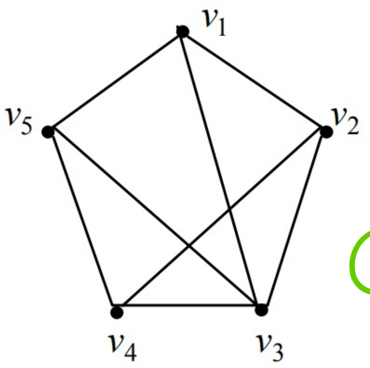


$n = 5$

Дополним до K_5



$\overline{G_5}$



G_5

Операции над графами

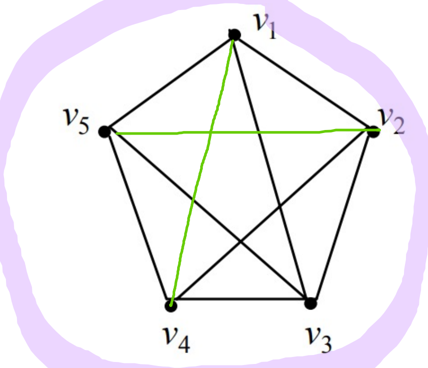
Опр **Дополнение графа до полного** — добавляет в исходный граф ребра до полного и удаляет ребра исходного

Complement or inverse

$G(V, E)$

$\overline{G}(V, K \setminus E)$

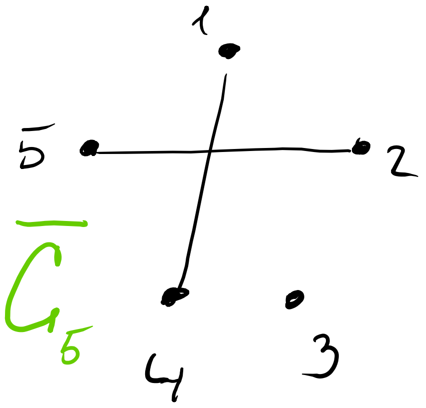
K – ребра $K_{|5|}$

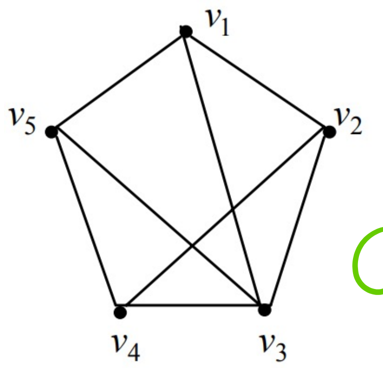


$n = 5$

Дополним до K_5

$\overline{G}_5$



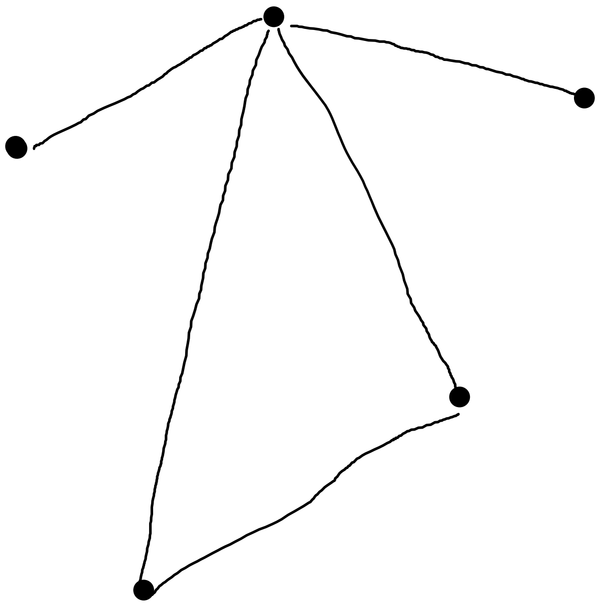


G_5

$$K_5 = \overline{G}_5 \cup G_5$$

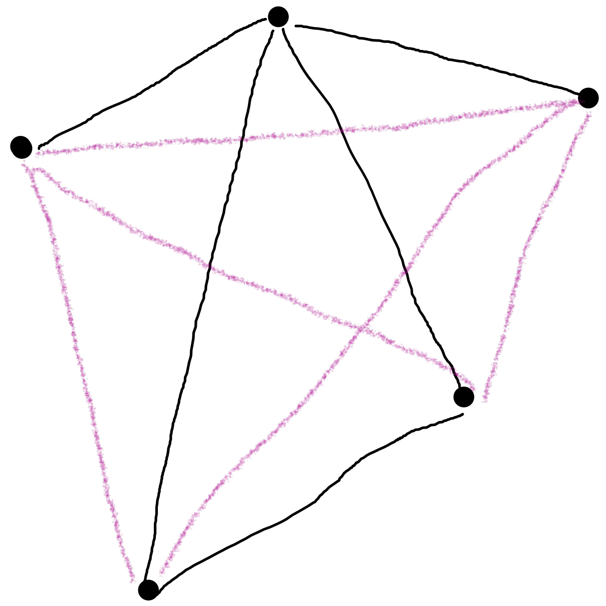
Пример дополнения

G_5

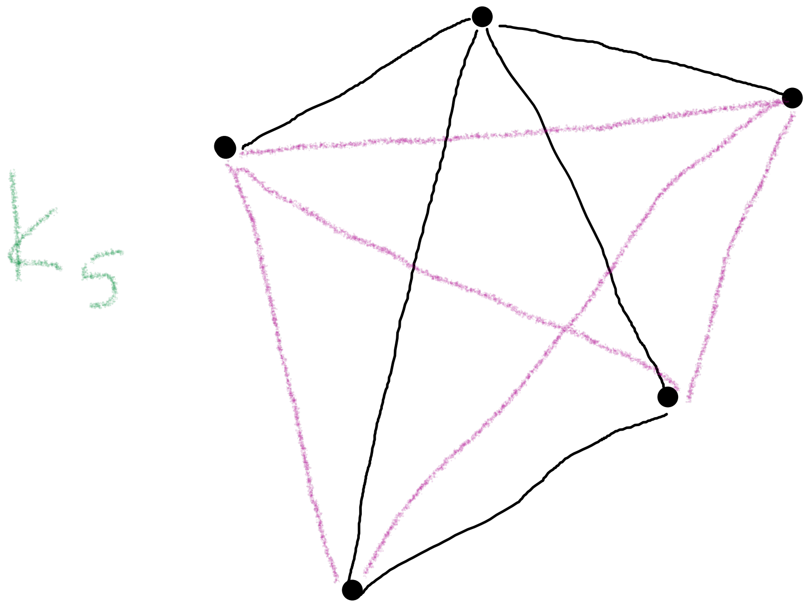


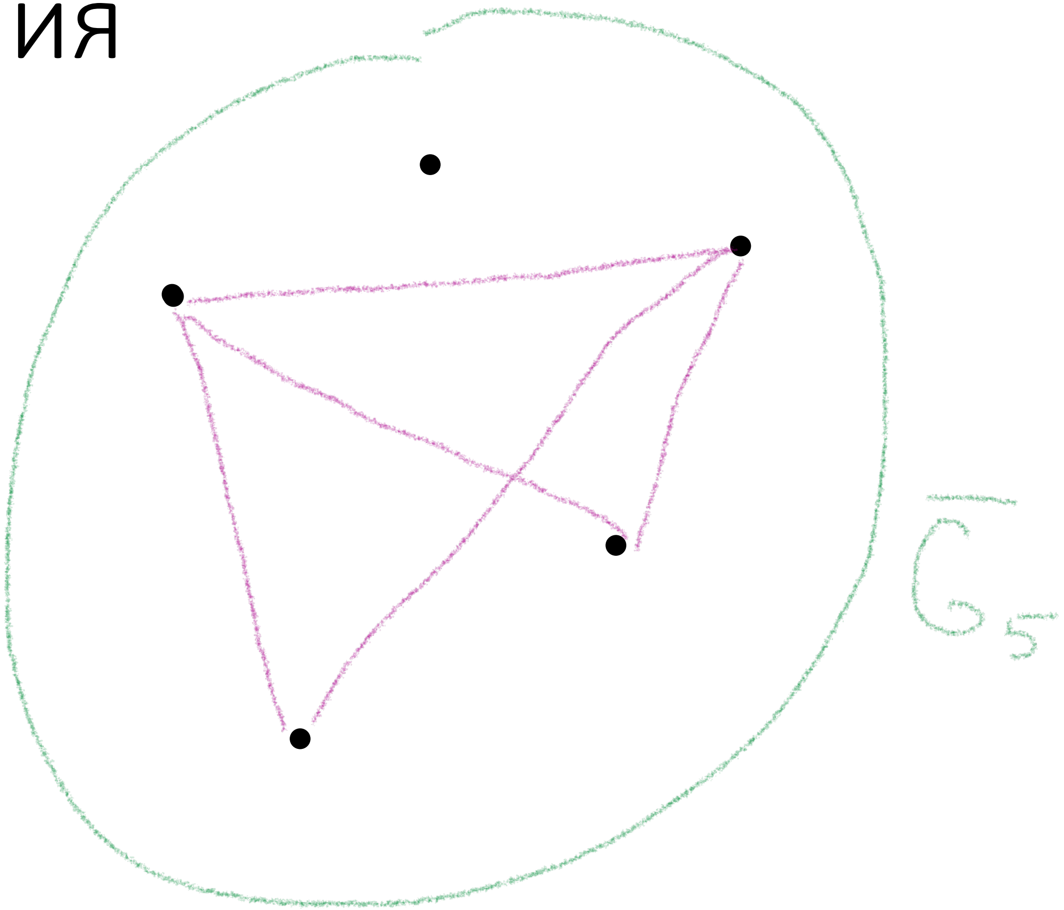
Пример дополнения

K_5

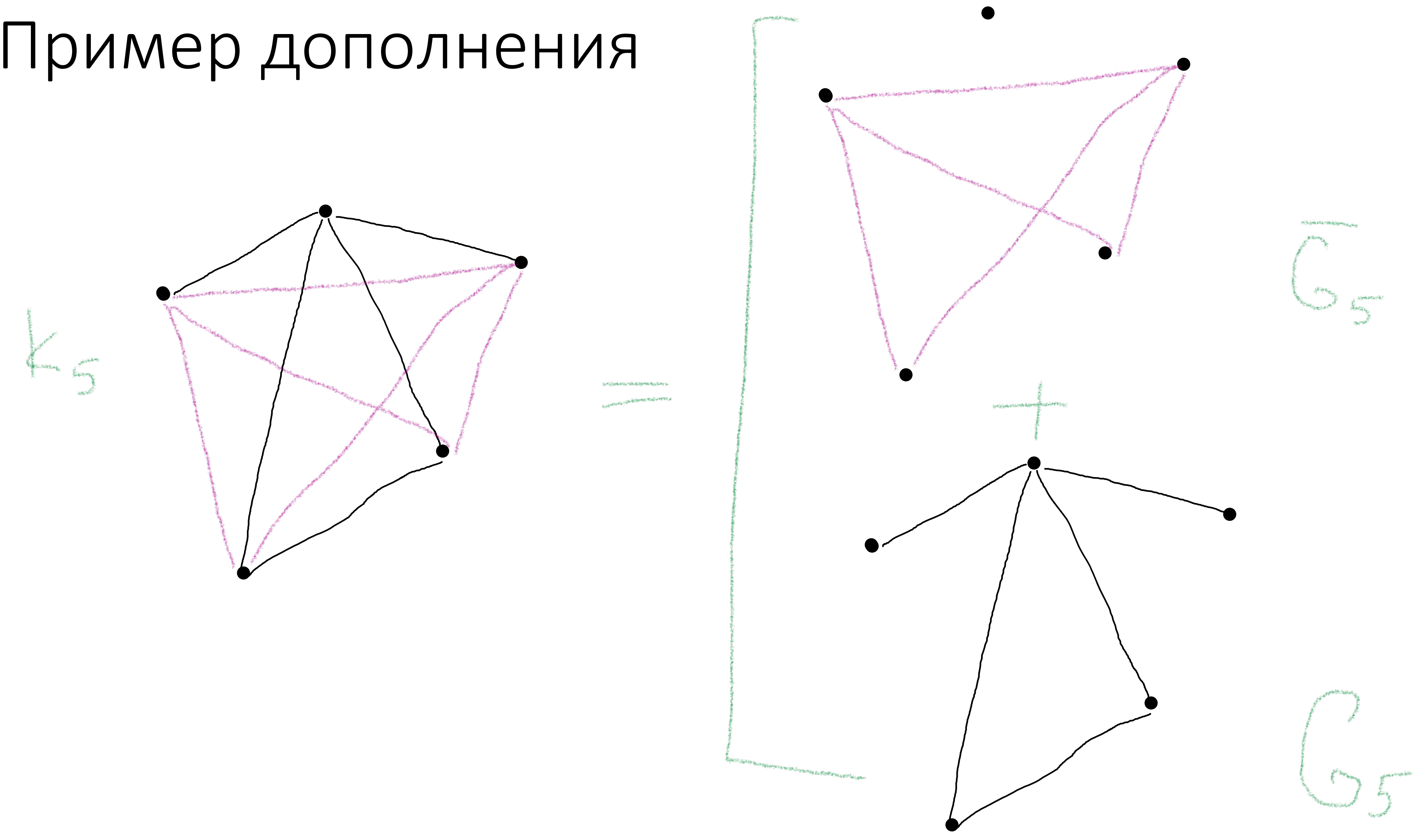


Пример дополнения





Пример дополнения



Полнота, регулярность и операции над графами

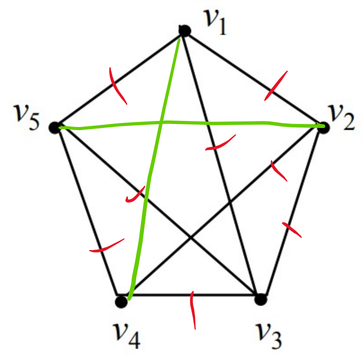
Опр **Дополнение графа до полного** — добавляет в исходный граф ребра до полного и удаляет ребра исходного

Complement or inverse

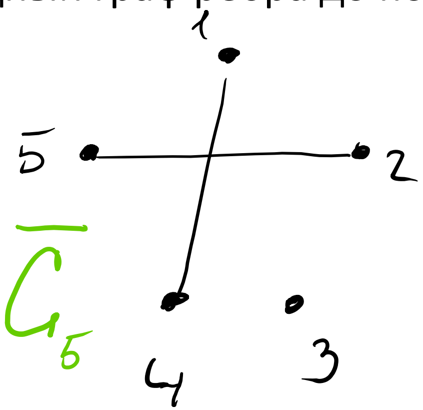
$G(V, E)$

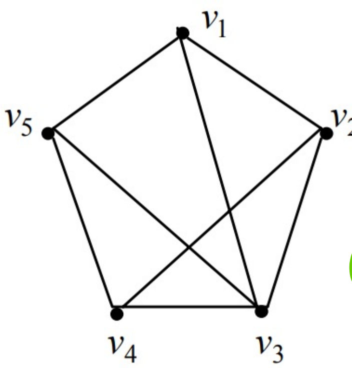
$\overline{G}(V, K \setminus E)$

K – ребра $K_{|V|}$



$\overline{G_5}$





G_5

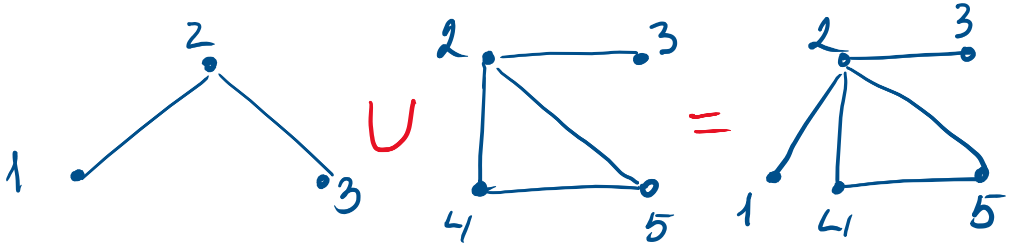
Опр **Объединение графов** $G(V, E)$ и $G'(V', E')$ — объединяет множества вершин и ребер этих графов

$H = G \cup G'$

$H(V'', E'')$

$V'' = V \cup V'$

$E'' = E \cup E'$



Опр **Пересечение графов** $G(V, E)$ и $G'(V', E')$ — пересекает множества вершин и ребер этих графов

$H = G \cap G'$

$H(V'', E'')$

$V'' = V \cap V'$

$E'' = E \cap E'$