Как понять, что реализация не подходит?

плохо написал – иди переписывай!

Алгоритм

Вход: значения

Вычисления: код

Выход: значение

Качество кода?

Оформление кода:

- Единообразное оформление: стандарт?

Читабельность кода:

- Чтобы понять мог реализацию другой программист ?

Сложный код: – длинное нечитабельное и не структурированное полотно ?

НО на кого это влияет ?

--пользователь **не видит код**

--ошибки искать и другому разобраться сложно!

Какой алгоритм плохой?

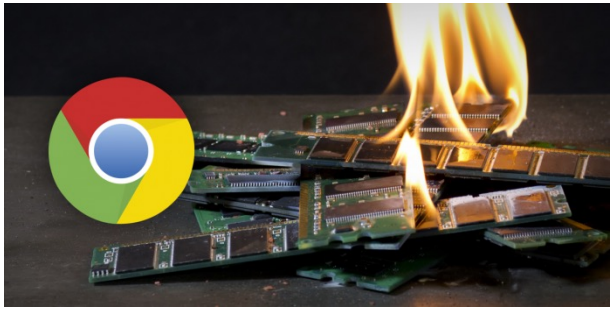
Медленно работает

- Быстрая машина - это дорого, а большинство пользовательских и рабочих точно не дорогие
- Мобильные устройства не настолько производительны, как компьютеры
- Интернет может сбоить, быть медленным
- Может требоваться быстрый отклик или мы теряем пользователей и деньги

Много жрет памяти

(чаще всего оперативную)

- Не хватает места другим приложениям
- Не хватает места другим исполняемым приложениям: работают медленно
- Данных может быть очень много и дублирование данных или попытка хранения в быстрой памяти - проблема



Оценка сложности алгоритма

По **ПАМЯТИ**: сколько занимает памяти

- 1 переменная - 1 пункт сложности
- Массив размером n - n пунктов сложности
- Строка длинной n - n пунктов сложности

По **ВРЕМЕНИ**: сколько операций нужно выполнить

- 1 операция - 1 пункт сложности: присвоить/сравнить
- 1 итерация = k операций в итерации - k пунктов сложности
- Условие = t логических операций и действий - t пунктов сложности

Примеры

Память:

```
int  i, j, n;
int  A[100];
char B[n];
```

3 переменных	3 пункта
Массив 100 элементов	100 пунктов
Строка n символов	**n** пунктов

Примеры

Память:

```
int  i, j, n;
int  A[100];
char B[n];
```

3 переменных	3 пункта
Массив 100 элементов	100 пунктов
Строка n символов	**n** пунктов

Время

```
for i = 1 to n {
      j++;
      k=n;
}
```

Операции	**Цикл**
1 (i = 1)	n - итераций
{1	2 пункта внутри итерации
1}	Итого: 2n+1

Примеры

Память:

```
int  i, j, n;
int  A[100];
char B[n];
```

3 переменных	3 пункта
Массив 100 элементов	100 пунктов
Строка n символов	**n** пунктов

Время

```
while (A[i] + A[i-1]  >  0) {
        A[i + 1] = A[i];
        i = i – 1;
}
if (i<0 && (i/2=0))
then  j=n;
```

Операции	**Цикл**
{3	n - итераций
2	7 пункта внутри итерации
2}	**Итого: 7n**

Условие	**подробнее**
4	i/2=0 - 2 операции

Примеры

Память:

```
int  i, j, n;
int  A[100];
char B[n];
```

3 переменных	3 пункта
Массив 100 элементов	100 пунктов
Строка n символов	**n** пунктов

Время

```
for i = 1 to n {
      j++;
      k=n;
}
while (A[i] + A[i-1]  >  0) {
       A[i + 1] = A[i];
       i = i – 1;
}
if (i<0 && (i/2=0))
then  j=n;
```

Операции	Цикл
1 (i = 1)	n - итераций
{1	2 пункта внутри итерации
1}	Итого: 2n+1

Операции	Цикл
{3	n - итераций
2	7 пункта внутри итерации
2}	Итого: **7n**

Условие	подробнее
4	i/2=0 - 2 операции

Примеры

```
int i, j, n=100;
int  A[n]=1;
char B[n];

for i = 1 to n do
     j++;

i=n;
while (A[i] + A[i-1]  >  0) {
       A[i + 1] = A[i];
       i = i – 1;
       if (i<0 && (i/2=0)) then  j=n;
}
```

Примеры

```
int i, j, n=100;
int  A[n]=1;
char B[n];

for i = 1 to n do
     j++;

i=n;
while (A[i] + A[i-1]  >  0) {
       A[i + 1] = A[i];
       i = i – 1;
       if (i<0 && (i/2=0)) then  j=n;
}
```

Память = M	Время = T
+3	+1
+n=100	+n
+n=100	
	+1
	{+n=100}
	+1
	{+3
	+2
	+2
	4+1 = 5}=12
	Итераций цикла: n
n+n+3	12n+1+n+n+1
M(n)=2n+3	**T(n)=14n+2**

Примеры

```
int  n=10;
int  A[n];
int  key, i, j;

for i = 0 to n-1 do
     A[j] =i;

for i = 0 to n-1 do
     for j = 0 to n-1 do
          A[i]=A[i]+A[j];
```

Примеры

```
int  n=10;
int  A[n];
int  key, i, j;

for i = 0 to n-1 do
     A[j] =i;

for i = 0 to n-1 do
     for j = 0 to n-1 do
          A[i]=A[i]+A[j];
```

Память = M	Время = T
1	+1
+n=10	
+3	
	+1
	{+n=10}
	+1
	{+1
	{+2} – n итераций}
	n - итераций
	=n(2n+1)
1+n+3	n(2n+1)+1+n+1+1
M(n)=n+4	**$T(n)=2n^2+2n+3$**

Функции сложности

M(n) – сложность по памяти

T(n) – сложность по времени

- Зависят от размера входных данных **n**
- Размерность мы можем получать во время исполнения программы
- Функция как и реализация может быть простой (x=2 «прямая», аналогично код без циклов и без массивов M(n) = 3 / T(n) = 6)

Функция сложности – **функция**!

M(n) – сложность по памяти

T(n) – сложность по времени

Вспомним типовые функции:

- x^2
- $Log_2\, x$
- $x*Log_2\, x$
- x^3
- a^x
- *и так далее*

Функция сложности

M(n) – сложность по памяти более предсказуема и чаще всего определена размером входных данных

T(n) – сложность по времени зависит в большей степени от программиста и его творческого порыва!

Далее будем чаще говорить именно о **временной сложности - сложности алгоритма!**

Показательный пример

```
int  n=10;
int  A[n];
int  key, i, j;


for i = 1 to n do
      A[j] =i;


for i = 1  to n do
      for j = 1 to i do
            A[i]=A[i]+A[j];
```

T(n) – как описать*?*

Распишем итерации первого цикла

Итерация № (внешнего)	Итераций внутреннего
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
…	…
i=n	n

Вычисление

```
for i = 1  to n do
    for j = 1 to i do
        A[i]=A[i]+A[j];
```

С помощью суммы арифметической прогрессии:

$T(n) = (1+n)n/2 = (n^2+n)/2$

- Внутренний цикл **for** зависит от внешнего
- Как мы видим (см таблицу ранее) число операций в итерации внутреннего цикла изменяется с шагом +1
- Описать число операций двух циклов можно с помощью суммы арифметической прогрессии

Пример

```
int  n=10;
int  A[N];
int  key, i, j;
//получаем массив A
i=N;
while (A[i] + A[i-1] > N){
        A[i - 1] = A[i] ;
        i = i – 1;
}
```

Пример

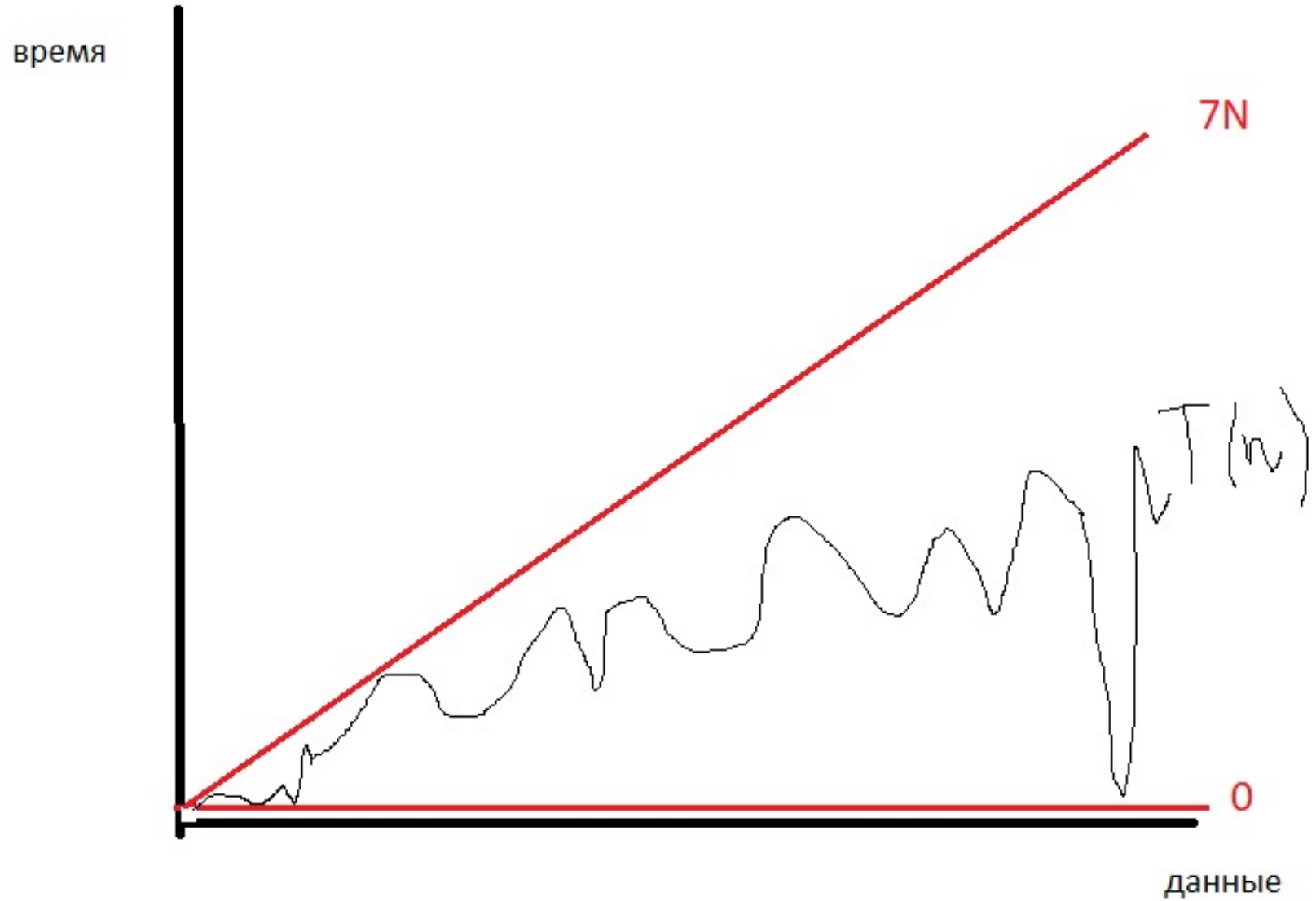
```
int  n=10;
int  A[N];
int  key, i, j;
//получаем массив A


i=N;
while (A[i] + A[i-1] > N){
        A[i - 1] = A[i] ;
        i = i – 1;
}
```

- Не зная какой будет массив A, вывести функцию времени невозможно

Как тогда оценить сложность по времени?

- **Минимально:** цикл не выполнится ни разу, значит условие проверится 1 раз=3 операции
- **Максимально:** цикл выполнится N раз = 7N

Иллюстрация оценки



Максимальная и минимальная оценки функции похожи на асимптоты

Асимптотическая оценка сложности

Порядок роста описывает то, как сложность алгоритма растет с увеличением размера входных данных. Чаще всего он представлен в виде O-нотации *(от нем. «Ordnung» — порядок)* : ***O(f(n))*, где *f(n)*** — формула, выражающая сложность алгоритма. В формуле может присутствовать переменная **n**, представляющая размер входных данных.

$T(n)=2n^2+2n+3$ порядок роста **n^2** или **$O(n^2)$**

$T(n)=1290n^3+12n^2-3586$ порядок роста **n^3** или **$O(n^3)$**

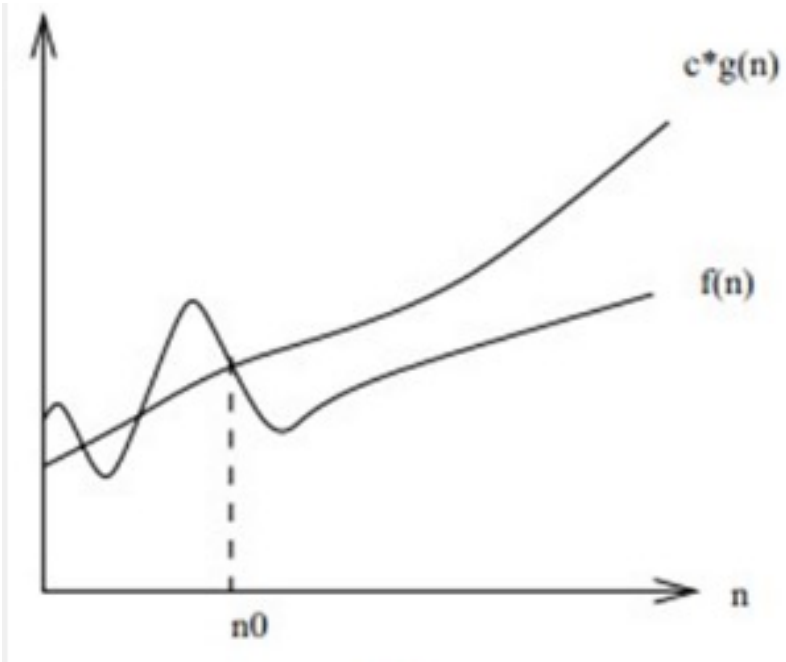
$T(n)=2n^2 \log n+142n^2-n$ порядок роста **$n^2 \log n$** или **$O(n^2 \log n)$**

$T(n)=1290n^3+2n^2 \log n-142n^2-n+386$ порядок роста **n^3** или **$O(n^3)$**

Асимптотическая оценка сложности

Существуют различные оценки сложности алгоритма. Пусть у нас есть функция f(n) (раньше мы называли ее T(n)), которая оценивает время работы нашего алгоритма. Тогда мы хотим найти новую функцию g(n), соответствующую определенным требованиям.

a)



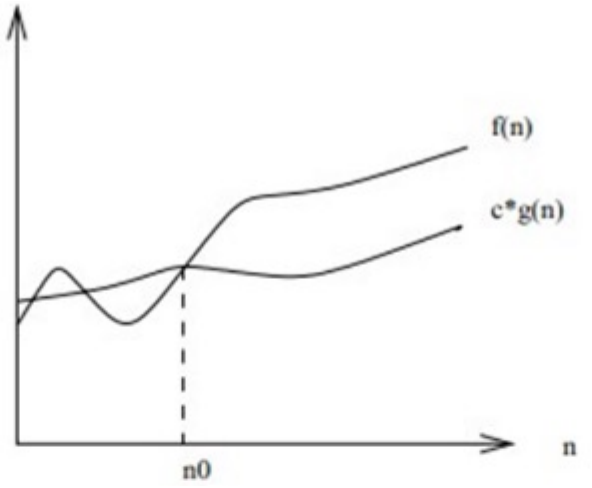
O(g(n)) – оценка сверху для f(n)

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\ c > 0, n_0 > 0 : \forall\ n > n_0$
выполняется
$0 <= f(n) <= c * g(n)$

Другими словами, для того, чтобы функция g(n) была оценкой сверху для f(n), должно выполняться следующее: Существуют $c > 0$ и $n_0 > 0$ такие, что начиная с некоторого $n > n_0$ f(n) лежит между 0 и c * g(n)

Асимптотическая оценка сложности

b)



Ω(g(n)) – оценка снизу для f(n)

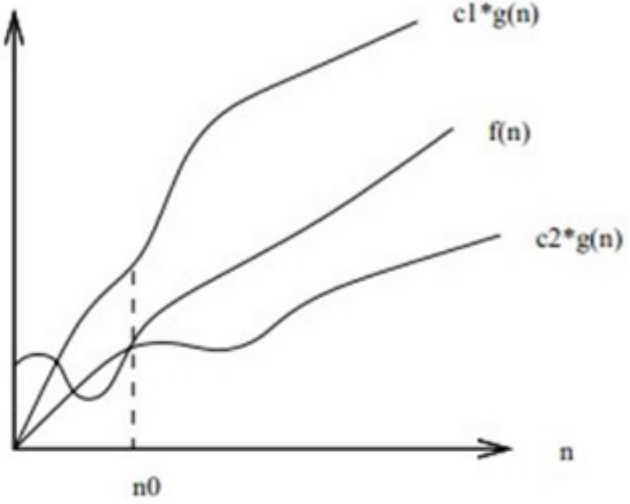
$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ c > 0, n_0 > 0 : \forall\ n > n_0$ выполняется

$0 <= c * g(n) <= f(n)$

Для того, чтобы функция g(n) была оценкой снизу для f(n), должно выполняться следующее: Существуют $c > 0$ и $n_0 > 0$ такие, что начиная с некоторого $n > n_0$ f(n) лежит выше, чем c * g(n)

c)



Θ(g(n)) – точная оценка для f(n)

$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ c_1 > 0, n_0 > 0, c_2 > 0 : \forall\ n > n_0$ выполняется

$0 <= c_2 * g(n) <= f(n) <= c_1 * g(n)$

Для того, чтобы функция g(n) была точной оценкой для f(n), должно выполняться следующее: Существуют c_1, c_2, $n_0 > 0$ такие, что начиная с некоторого $n > n_0$ f(n) лежит между $c_1 * g(n)$ и $c_2 * g(n)$

Свойства O

(читается как O большое)

Пусть есть 2 функции: $f_1(n) = O(g_1(n))$, $f_2(n) = O(g_2(n))$
Тогда для них выполняются следующие свойства:

1. Сложность суммы: $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$
   бОльшая из функций порядка роста
2. Сложность произведения: $f_1(n) * f_2(n) = O(g_1(n) * g_2(n))$
   произведение функций порядков роста
3. Умножение на константу: $f_1(n) * c = O(g_1(n))$
   при умножении константы отбрасываются
4. Сложение с константой: $f_1(n) + c = O(g_1(n))$
   при сложении константы тоже отбрасываются
5. Теорема о связи O, Ω и Θ: $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow O(g(n)) = \Omega(g(n))$
   Точная оценка существует тогда и только тогда, когда верхняя и нижняя оценки совпадают. В таком случае все 3 оценки равны между собой

Зачем оценивать алгоритмы?

Устройство 1:

10^9 операций/сек

Объем данных: N= **10^7**

Алгоритм: **n^2**

Время: **$10^7 * 10^7 / 10^9$ = 10^5 сек > суток**

Устройство 2:

10^7 операций/сек

Объем данных: N= **10^7**

Алгоритм: **n*log n**

Время: **$10^7 *$ log 10^7 / 10^7 = 23,25 сек < минуты**

Зачем оценивать алгоритмы?

Время выполнения алгоритма с определённой сложностью в зависимости от размера входных данных при скорости $\mathbf{10^6}$ операций в секунду:

размер / сложность	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 сек.	0,00002 сек.	0,00003 сек.	0,00004 сек.	0,00005 сек.	0,00005 сек.
n^2	0,0001 сек.	0,0004 сек.	0,0009 сек.	0,0016 сек.	0,0025 сек.	0,0036 сек.
n^3	0,001 сек.	0,008 сек.	0,027 сек.	0,064 сек.	0,125 сек.	0,216 сек.
n^5	0,1 сек.	3,2 сек.	24,3 сек.	1,7 минут	5,2 минут	13 минут
2^n	0,0001 сек.	1 сек.	17,9 минут	12,7 дней	35,7 веков	366 веков
3^n	0,059 сек.	58 минут	6,5 лет	3855 веков	2×10^8 веков	$1{,}3 \times 10^{13}$ веков

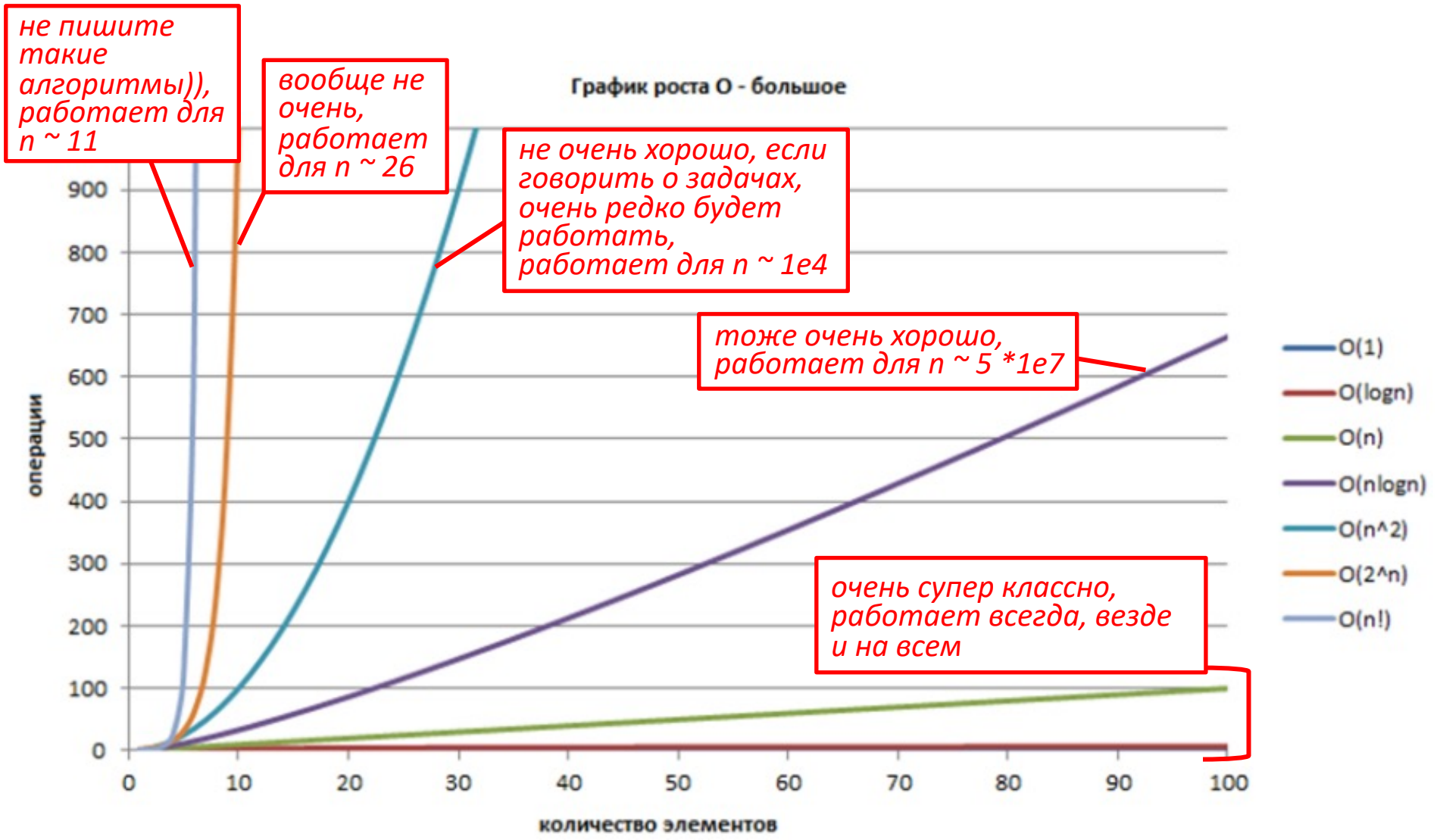
Классификация алгоритмов

Обычно алгоритмы классифицируют в соответствии с их временной сложностью. Можно выделить следующие их типы:

1. Постоянный - сложность оценивается как $O(1)$.
2. Логарифмический - сложность оценивается как $O(log(n))$
3. Линейный - оценка равна $O(n)$.
4. Квадратный - $O(n^2)$
5. Кубический, полиноминальный - $O(n^3), O(n^m)$.
6. Экспоненциальный - $O(t^{p(n)})$, t- константа, $p(n)$ - некоторая полиномиальная функция.
7. Факториальный - $O(n!)$. Обладает наибольшей временной сложностью среди всех известных типов.

Классификация алгоритмов

Для того, чтобы визуально представить себе различную скорость роста функций, достаточно взглянуть на следующий график:



Классификация алгоритмов

Логарифмическая сложность присуща алгоритмам, которые сводят большую задачу к набору меньших задач, уменьшая на каждом шаге размер задачи на постоянную величину. Например, двоичный поиск в массиве, когда на каждом шаге размер массива сокращается вдвое.

```
int binSearch(int[] a, int key):
    int l = -1
    int r = len(a)
    while l < r - 1
        m = (l + r) / 2
        if a[m] < key
            l = m
        else
            r = m
    return r
```

На каждом шаге алгоритма область поиска уменьшается в 2 раза

O(logn)

Классификация алгоритмов

Линейное время выполнения свойственно тем алгоритмам, в которых осуществляется небольшая обработка каждого входного элемента.

```
int a[n];
int x;
int cnt = 0;

for (int i = 0; i < n; i++)
{
    if (a[i] == x)
    {
        cnt++;
    }
}
```

Пример: найти количество чисел равных **x** в массиве размера **n**

Проходим по всему массиву за n

O(n)

Классификация алгоритмов

Оценка *nlog(n)* возникает в тех случаях, когда алгоритм решает задачу, разбивая её на меньшие подзадачи и решая их независимо друг от друга, а затем объединяя решение.

```
function mergeSortRecursive(a : int[n]; left, right : int):
    if left + 1 >= right
        return
    mid = (left + right) / 2
    mergeSortRecursive(a, left, mid)
    mergeSortRecursive(a, mid, right)
    merge(a, left, mid, right)
```

Разбиение на 2, отсюда logn

Проход суммарно по всему массиву, отсюда n

Пример: сортировка слиянием

O(nlogn)

Классификация алгоритмов

Квадратичное время выполнения свойственно алгоритмам, обрабатывающим все пары элементов данных.

```
function bubbleSort(a):
  for i = 0 to n - 2
    for j = 0 to n - 2
      if a[j] > a[j + 1]
        swap(a[j], a[j + 1])
```

Проход по всему массиву, отсюда n

Еще один проход по всему массиву, отсюда еще n

Пример: сортировка пузырьком

$O(n^2)$

Классификация алгоритмов

Кубическое время соответсвует алгоритмам, которые обрабатывают все тройки элементов данных.

```
int a[n];

for (int i = 0; i < n; i++)
{
    for (int j = 0; j < n; j++)
    {
        for (int k = 0; k < n; k++)
        {
            do_something(a[i], a[j], a[k]);
        }
    }
}
```

3 прохода по массиву, каждый за n

Пример: перебрать все тройки чисел в массиве

$O(n^3)$

Классификация алгоритмов

Экспоненциальное и факториальное время присуще алгоритмам, которые выполняют перебор всевозможных сочетаний элементов.

Пример экспоненциального времени работы: есть **n** человек и **n** мест, на которые этих людей надо рассадить. Перебрать все возможные комбинации занятых мест **$O(2^n)$**

Пример факториального времени работы: есть **n** человек и **n** мест, на которые этих людей надо рассадить. Перебрать все возможные перестановки людей на местах **$O(n!)$**