# ДЗ #10, MST и DSU СП6 ВШЭ, Магистры, 13 ноября 2024

# Содержание

Must have		2
Задача 10А.	Остовное дерево 2 [0.25 (2.5), 256]	2
Задача 10В.	Ближе к предкам [0.25 (2.5), 256]	3
Задачи здор	ового человека	4
Задача 10С.	Разрезание графа [0.4 (3.5), 256]	4
Задача 10D.	Больные вершины [0.3 (3), 256]	5
Для искател	ей острых ощущений	6
Задача 10Е.	Ребра добавляются, граф растет [0.7 (6), 256]	6
Задача 10F.	Электросеть [0.3 (3.5), 256]	7

У вас не получается читать/выводить данные? Воспользуйтесь примерами (c++) (python).

Обратите внимание, входные данные лежат в **стандартном потоке ввода** (он же stdin), вывести ответ нужно в **стандартный поток вывода** (он же stdout).

# ДЗ #10, MST и DSU СПб ВШЭ, Магистры, 13 ноября 2024

# Must have

# Задача 10А. Остовное дерево 2 [0.25 (2.5), 256]

Требуется найти в связном графе остовное дерево минимального веса.

# Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит два натуральных числа n и m — количество вершин и ребер графа соответственно. Следующие m строк содержат описание ребер по одному на строке. Ребро номер i описывается тремя натуральными числами  $b_i$ ,  $e_i$  и  $w_i$  — номера кондов ребра и его вес соответственно ( $1 \le b_i, e_i \le n, \ 0 \le w_i \le 100\,000$ ).  $n \le 20\,000, m \le 100\,000$ .

Граф является связным.

# Формат выходных данных

Первая строка выходного файла должна содержать одно натуральное число — вес минимального остовного дерева.

# Примеры

stdin	stdout
4 4	7
1 2 1	
2 3 2	
3 4 5	
4 1 4	

# Подсказка по решению

Здесь подойдёт любой алгоритм MST. Краскал. Прим. Важно, чтобы работал за  $\mathcal{O}(m \log n)$ .

# Задача 10В. Ближе к предкам [0.25 (2.5), 256]

Страна Древляндия изначально состояла из одного древнего города 0. Время от времени города некоторого города  $p_i$ , недовольные условиями жизни уезжали из  $p_i$  и создавали новый город. Каждый следующий город получал минимальный не использованный номер, то есть, i. Жители города i никогда не забывают, что их предки пришли именно из  $p_i$ . Последнее время города по программе «слияние с предками» стали объединяться в регионы. Время от времени город i объявляет «не должно быть больше никаких границ между нами и предками из города  $p_i$ , давайте объединим наши городские агломерации в одну агломерацию».

Вам, как министру экономики Древляндии интересно в каждый момент времени знать размер самой большой городской агломерации, количество городов, в неё входящее.

### Формат входных данных

Входные данные состоят из одного или нескольких тестов. На первой строке число тестов t, далее t однотипных тестов, каждый из которых задан следующим образом.

На 1-й строке n ( $2 \le n \le 10^5$ ). На 2-й строке числа  $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ :  $1 \le p_i < i - \forall$  города номер города предков. На 3-й строке перестановка из n-1 числа от 1 до n-1 – порядок операций слияния, число x обозначает, что регионы городов x и  $p_x$  сливаются в один.

Сумма n по всем тестам также не превосходит  $10^5$ .

# Формат выходных данных

Для каждого теста выведите одну строку из n-1 числа, числа в этой строке – размеры максимальных регионов после каждой из операций слияния в тесте.

### Пример

stdin	stdout
3	2
2	2 3 4
0	2 2 4
1	
4	
0 1 2	
3 2 1	
4	
0 1 2	
1 3 2	

### Подсказка по решению

Просто DSU и хранить размеры.

# Задачи здорового человека

# Задача 10С. Разрезание графа [0.4 (3.5), 256]

Дан неориентированный граф. Над ним в заданном порядке производят операции следующих двух типов:

- cut разрезать граф, то есть удалить из него ребро;
- ask проверить, лежат ли две вершины графа в одной компоненте связности.

Известно, что после выполнения всех операций типа cut рёбер в графе не осталось. Найдите результат выполнения каждой из операций типа ask.

### Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит три целых числа, разделённые пробелами — количество вершин графа n, количество рёбер m и количество операций k ( $1 \le n \le 50\,000$ ,  $0 \le m \le 100\,000$ ,  $m \le k \le 150\,000$ ).

Следующие m строк задают рёбра графа; i-ая из этих строк содержит два числа  $u_i$  и  $v_i$   $(1 \le u_i, v_i \le n)$ , разделённые пробелами — номера концов i-го ребра. Вершины нумеруются с единицы; граф не содержит петель и кратных рёбер.

Далее следуют k строк, описывающих операции. Операция типа **cut** задаётся строкой "**cut** u v"  $(1 \le u, v \le n)$ , которая означает, что из графа удаляют ребро между вершинами u u v. Операция типа **ask** задаётся строкой "**ask** u v"  $(1 \le u, v \le n)$ , которая означает, что необходимо узнать, лежат ли в данный момент вершины u u v в одной компоненте связности. Гарантируется, что каждое ребро графа встретится в операциях типа **cut** ровно один раз.

# Формат выходных данных

Для каждой операции ask во входном файле выведите на отдельной строке слово "YES", если две указанные вершины лежат в одной компоненте связности, и "NO" в противном случае. Порядок ответов должен соответствовать порядку операций ask во входном файле.

### Пример

stdin	stdout
3 3 7	YES
1 2	YES
2 3	NO
3 1	NO
ask 3 3	
cut 1 2	
ask 1 2	
cut 1 3	
ask 2 1	
cut 2 3	
ask 3 1	

#### Подсказка по решению

Разрезать сложно. Просто соединять. Что же делать?

# Задача 10D. Больные вершины [0.3 (3), 256]

Случилось страшное, в древнем великом дереве вершины начали заболевать. Вы пока не понимаете причину болезни, пытаетесь разобраться, для этого нужно уметь быстро узнавать ближайшую к i в направлении корня больную вершину.

# Формат входных данных

Входные данные состоят из одного или нескольких тестов. На первой строке число тестов t, далее t однотипных тестов, каждый из которых задан следующим образом.

На 1-й строке число вершин в дереве n  $(2 \le n \le 10^5)$  и число запросов q  $(1 \le q \le 10^5)$ . Корень дерева – вершина 1. На 2-й строке числа  $p_2, p_3, \ldots p_n \colon 1 \le p_i < i$ .  $p_v$  – отец вершины v в дереве. Изначально все вершины здоровы. Следующие q строк содержат заросы вида «? i» – найти ближайшую больную от i в направлении корня и «- i» – вершина i заболела.

Сумма n и q по всем тестам также не превосходит  $10^5$ .

### Формат выходных данных

Для каждого теста выведите одну строку, содержащую ответы на запросы вида «?». Если больных в направлении корня нет, ответом будет -1.

### Пример

stdin	stdout
3	-1 1 2
2 5	-1 -1
1	-1 2 2
? 2	
- 1	
? 2	
- 2	
? 2	
3 4	
1 1	
- 2	
? 3	
- 3	
? 1	
6 4	
1 2 3 4 5	
- 2	
? 1	
? 2	
? 6	

#### Подсказка по решению

DSU. Опять идея «смотреть с конца». Опять идея сжатия путей.

Кстати, вы знали, что на практике, если из эвристик «ранговая» и «сжатие путей» реализовать только вторую, то работает быстрее?

# ДЗ #10, MST и DSU СП6 ВШЭ, Магистры, 13 ноября 2024

# Для искателей острых ощущений

# Задача 10Е. Ребра добавляются, граф растет [0.7 (6), 256]

В неориентированный граф последовательно добавляются новые ребра. Изначально граф пустой. После каждого добавления нужно говорить, является ли текущий граф двудольным.

# Формат входных данных

На первой строке n — количество вершин, m — количество операций «добавить ребро». Следующие m строк содержат пары чисел от 1 до n — описание добавляемых ребер.

## Формат выходных данных

Выведите в строчку m нулей и единиц. i-й символ должен быть равен единице, если граф, состоящий из первых i ребер, является двудольным.

$$1 \le n, m \le 300\,000$$

# Примеры

stdin	stdout
3 3	110
1 2	
2 3	
3 1	

# Задача 10 F. Электросеть [0.3 (3.5), 256]

Дан граф. Вершины — точки на плоскости. Между каждой парой городов i, j можно построить дорогу. Стоимость дороги  $(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|)\cdot(k_i+k_j)$ . А ещё в каждом городе можно построить электростанцию за стоимость  $c_i$ . Изначально дорог нет. Нужно за минимальную суммарную стоимость сделать так, чтобы в каждой компоненте связности была минимум одна электростанция.

### Формат входных данных

В первой строке записано одно целое число n ( $1 \le n \le 2000$ ) — количество городов. Затем следует n строк. В i-й строке записаны два целых числа  $x_i$  ( $1 \le x_i \le 10^6$ ) и  $y_i$  ( $1 \le y_i \le 10^6$ ) — координаты i-го города. В следующей строке записаны n целых чисел  $c_1, c_2, \ldots, c_n$  ( $1 \le c_i \le 10^9$ ) — цена установки электростанции в i-м городе. В последней строке записаны n целых чисел  $k_1, k_2, \ldots, k_n$  ( $1 \le k_i \le 10^9$ ).

## Формат выходных данных

В первой строке выведите суммарную стоимость.

Далее информацию где строить электростанции – число городов, сами города.

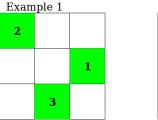
Далее информацию, какие города соединять – число дорог, какие города соединять.

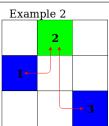
Если существует несколько способов так выбрать города и соединения, чтобы получить конструкцию минимальной цены, то выведите любую из них.

# Примеры

stdin	stdout
3	8
2 3	3
1 1	1 2 3
3 2	0
3 2 3	
3 2 3	
3	27
2 1	1
1 2	2
3 3	2
23 2 23	1 2
3 2 3	2 3

Замечание





Города с электростанциями раскрашены зеленым, остальные — синим, дороги красным.

В первом примере цена строительства электростанций во всех городах равна 3+2+3=8. Можно показать, что больше никакая конфигурация не стоит меньше 8 иен.

Во втором примере цена строительства электростанции в городе 2 равна 2. Стоимость соединения городов 1 и 2 равна  $2 \cdot (3+2)$ , соединения городов 2 и 3 равна  $3 \cdot (2+3)$ . Итого 27.