

SPb HSE, MOAD ВБИБ, осень 2024/25
Практика по алгоритмам #10

MST и DSU

14 ноября

Собрано 7 ноября 2024 г. в 21:30

Содержание

1. MST и DSU

1

MST и DSU

1. Дерево кратчайших путей

Дан оргграф без отрицательных циклов (отрицательные рёбра могут быть) и расстояния от s до всех вершин в графе. Восстановить дерево кратчайших путей за $\mathcal{O}(E)$.

2. Обмен валют

Есть n валют и m обменников. i -й обменник предлагает менять валюту a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i . Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные m обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты. $\mathcal{O}(nm)$.

3. Единственность MST

Доказать, что в графе с различными весами рёбер MST единственно.

4. Перестроение MST

Дан взвешенный граф G . Дано минимальное остовное дерево на нем. У ребра e поменяли вес. Найти новое минимальное остовное дерево за $\mathcal{O}(V + E)$.

Разберите все 4 случая!

5. Online двудольность

Дан неорграф. В него в online добавляются рёбра. После каждого добавления говорить, двудолен ли граф?

- $\mathcal{O}(m \log n)$ через перекрашивание компонент.
- Быстрее через DSU.

6. Чётность

В каждой клетке прямой записано число 0 или 1. Поступает информация: чётность количества единиц на отрезке $[L_i, R_i]$, найти первый запрос, после которого данные противоречивы.

7. Казалось бы, причём здесь СНМ?

У нас есть массив длины n , мы хотим выполнить m запросов вида «покрасить отрезок $[l_i, r_i]$ массива в цвет c_i » и вывести, что получилось в конце. Решите за $\mathcal{O}(n \log m)$.

Подсказка: попытайтесь выполнять запросы, начиная с последнего.

8. Порог достижимости

Для каждой пары вершин в графе найти $w[a, b]$ – такой минимальный вес, что из a в b есть путь по рёбрам веса $\leq w[a, b]$.

9. (*) Краскал наоборот

Пусть дан связный взвешенный неорграф, будем рассматривать его ребра в порядке невозрастания веса и удалять текущее ребро, если связность графа при этом не нарушается. Докажите, что этот алгоритм находит минимальный остов, или придумайте контрпример.

10. (*) Форд-Беллман и число итераций

Пусть алгоритм Беллмана-Форда на каждой итерации рассматривает ребра в таком порядке:

1. Рёбра из меньшей вершины в большую в порядке *возрастания* номера исходящей вершины.
2. Рёбра из большей вершины в меньшую в порядке *убывания* номера исходящей вершины.

Докажите, что алгоритм найдет все кратчайшие пути за $\frac{n}{2}$ итераций.

11. (*) Форд-Беллман и число итераций – 2

Добавим рандомчика и получим $\frac{n}{3}$ итераций.