

# Вопросы к экзамену по алгоритмам SPb HSE, ВБИБ, март 2025

## Общая информация

- Слайды от Данила: [\[link\]](#) [\[wiki\]](#)
- Конспекты ПМИ: [\[part1\]](#) [\[part2\]](#) [\[part3\]](#)
- wiki курса: [\[wiki\]](#)
- Экзамен: письменный + устный,  $\approx 1$  час на подготовку билета,  $\approx 20$  минут на ответ записанного и дополнительных вопросов. Экзамен проходит *без* использования конспекта и других источников.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) темы, обязательные к знанию (без них не получить удовл. оценку)
- (+) факультативные темы (оценка 10) – нужно заботать 6 **любых** темы из 8.

## Структуры данных

- (a) 1. Неявный ключ подробно.
- (a) 2. Treap: Split/Merge. Insert/Delete.
- 3. Treap: более быстрые Insert/Delete, через один Split/Merge.
- 4. Treap: операции на отрезке (SumX), модификации на отрезке (+= на отрезке и := на отрезке).
- 5. Treap: оценка на среднюю глубину (с док-вом) и максимальную глубину (без док-ва).
- 6. Treap (rope): reverse(l,r), rotate(k).
- 7. Дерево отрезков: базовая версия.
- 8. Отложенные операции (+= на отрезке и := на отрезке).
- 9. Дерево отрезков: для мультимножеств из чисел от 1 до  $10^{18}$ .
- 10. Дерево отрезков: k-ая статистика на отрезке за  $\mathcal{O}(\log^3)$ .
- 11. Персистентность: частично-персистентный массив за  $\mathcal{O}(1)$  на *change* и  $\mathcal{O}(\log n)$  на *get*.
- 12. Персистентность: полностью персистентное BST, Д.О.
- 13. Персистентность: задача про копирование куска массива за  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- 14. Персистентность: k-ая статистика на отрезке за  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- 15. Scanline: для  $n$  точек на плоскости сумма в углу и сумма на прямоугольнике.
- 16. Scanline: онлайн сумма на прямоугольнике за  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- 17. Scanline: наибольшая по весу возрастающая подпоследовательность.
- 18. Эйлеров-обход дерева: сумма в поддереве за  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- 19. LCA  $\rightarrow$  RMQ через эйлеров обход: LCA за  $\langle \mathcal{O}(n \log n), \mathcal{O}(1) \rangle$ .

## Строки и суффструктуры

- 20. Z-функция и поиск подстроки в строке.
- 21. Z-функция: поиск подстроки в строке с 1 и 2 ошибками.
- (a) 22. Бор: add/find, способы хранения.
- (a) 23. Бор: решение задачи «поиск коротких слов в тексте» за  $\mathcal{O}(\text{build} + |\text{text}| \cdot \max |s_i|)$
- 24. Хеши: задача про сборку генома из  $10^6$  ридов длины 100.
- 25. Префикс-функция (повторение).
- 26. Ахо-Корасик, решение задачи «поиск слов в тексте» за  $\mathcal{O}(\sum |s_i| + |\text{text}|)$ .

27. Ахо-Корасик, построение полного автомата.
28. Ахо-Корасик: для каждого слова найти число вхождений, первое, последнее вхождения.
29. Сжатое суфф.дерево за  $\mathcal{O}(n^2)$  и  $\mathcal{O}(n)$  памяти.
30. Поиск строки  $s$  в тексте  $t$  за  $\mathcal{O}(|s|)$ .
31. Наибольшая общая подстрока суфф.деревам.
32. Суфф.массив за  $\mathcal{O}(n \log n)$ , поиск подстроки в суфф.массиве за  $\mathcal{O}(|s| \log |text|)$ .
33. Суфф.массив  $\rightarrow$  суфф.дерево.
34. Суфф.дерево  $\rightarrow$  суфф.массив.
35. Наибольшая общая подстрока суфф.массивом.
36. LCP хешами.
37. LCP через Касаи.
38. WWT. Определение, построение.
39.  $WWT^{-1}$  за  $\mathcal{O}(n)$  (сперва на строке из разных букв, например, badc).
40. fm-index

### Паросочетания и потоки

41. Лемма о дополняющем чередующемся пути.
42. Поиск ЧДП dfs-ом за  $\mathcal{O}(V + E)$ .
- (a) 43. Алгоритм Куна (уже изученное + жадность).
44. Доказательство корректности Куна.
45. Поиск min Vertex Cover (алгоритм, обоснование).
46. Поиск max Independent Set (алгоритм, обоснование).
47. Жадная инициализация. Поиск  $\frac{1}{2}|M|$  за  $\mathcal{O}(E)$ .
48. Оптимизация Куна: поиск за  $\mathcal{O}(V + E)$  сразу нескольких ЧДП.
49. Покрывтие вершин DAG-а путями.
50. Задача о выполнении заказов такси минимальным числом машин.
51. Определения: поток, величина потока, разрез, величина разреза.
52. Теорема и алгоритм Форд-Фалкерсона для max flow.
53. Алгоритм поиска min cut, доказательство Форда-Фалкерсона.
54. Циркуляция. Декомпозиция.
- (a) 55. Задача про  $k$  рёберно-непересекающихся пути.
56. Задача про  $k$  вершинно-непересекающихся пути.
57. Минимальный вершинный разрез.
58. Потоки: алгоритм Эдмондса-Карпа.
59. Потоки: алгоритм Scaling (масштабирование потока).
60. Поиск максимального паросочетания через потоки.
61. Mincost поток размера  $k$  и паросочетание min веса.

### FFT и random

- (a) 62. Умножение многочленов за  $\mathcal{O}(n^2)$ , хранение многочленов. Умножение чисел.
- (a) 63. Применения многочленов: Subsetsum, 3-SUM.
64. Применения многочленов: счастливые билеты.
65. Умножение за  $\mathcal{O}(n \log n)$ : общая схема умножения; рекурсивное прямое FFT.
66. Обратное FFT и обоснование.
67. FFT, быстрая реализация: предподсчёт корней, минимизация числа умножений.

- 68. Версия по простому модулю.
- 69. Подсчёт всех скалярных произведений при наложении  $B$  к части  $A$ .
- 70. Поиск строки в тексте: минимизировать число ошибок.
- 71. Деление за  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- 72. Использование FFT: разделяй и властвуй для деления.
- 73. Использование FFT: разделяй и властвуй для смены системы счисления
- (a) 74. Random: Las-Vegas (поиск простого).
- (a) 75. Random: Monte-Carlo (подсчёт площадь).
- 76. Random: RandomWalk (решение 3-SAT).
- 77. Шифрование: закрытый ключ.
- 78. Шифрование: открытый ключ, RSA.

### Дополнительные вопросы

- (+) 79. RMQ за  $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(1) \rangle$  (битовая магия).
- (+) 80. ETT (Euler-Tour-Tree).
- (+) 81. Построение суфф.дерева за  $\mathcal{O}(n)$ .
- (+) 82. Сортировка  $n$  строк над алфавитом  $n$  за линейное время.
- (+) 83. Поиск максимальной антицепи, теорема Дилворта.
- (+) 84. Mincost поток: потенциалы и Дейкстра; оценка времени для паросочетания min веса.
- (+) 85. Применение FFT: вычисление значения в  $n$  произвольных точках.
- (+) 86. Random: алгоритм Каргера-Штейна поиска глобального разреза за  $\mathcal{O}(n^2 \log^2 n)$ .