2 курс ПМИ, осень 2024/25
Практика по алгоритмам #11

Линейная алгебра

3 декабря

Собрано 2 декабря 2024 г. в 11:39

Содержание

Линейная алгебра

1. **Разложение вектора в базисе**

   a) Базис – произвольный набор линейно независимых векторов.
   b) Базис – столбцы треугольной матрицы.
   c) Ортогональный базис.

2. **Точка в параллелепипеде**

   Даны d-мерная точка и d-мерный параллелепипед.
   Проверить, лежит ли точка в параллелепипеде.

3. **Найти расстояние от точки до подпространства**

   Дана d-мерная точка и набор из k d-мерных векторов, базис линейного подпространства. Найти расстояние от точка до подпространства.

   a) Ортогонализацией базиса.
   b) Методом Гаусса.
   c) (*) Решая $|Ax - b| \to \min$

4. **Выбор базиса минимального веса**

   Дан набор векторов с весами, вектора образуют линейное пространство. Выбрать из данных векторов базис этого пространства минимального веса. За сколько работает решение?

5. **Найти рекуррентность**

   Вы знаете, что последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ образована линейным рекуррентным соотношением с коэффициентами $1, 1$: $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$. Решим обратную задачу: дана последовательность длины n, найти минимальное k и k коэффициентов, задающие данную последовательность, как линейную рекуррентность.

   $\mathcal{O}(n^3 \log n)$, $\mathcal{O}(n^3)$, $\mathcal{O}(nk + k^3 \log k)$, (*) $\mathcal{O}(nk + k^3)$.

6. **Минимальное квадратичное**

   Дана точка b и вектора $a_1, \ldots, a_n$. Выразить вектор $b = \sum a_i x_i \colon \sum x_i^2 \to \min$.

7. **Вероятность выжить**

   a) Дан грид с дырками. Вы начинаете в $(1, 1)$, за ход переходите с вероятностью $\frac{1}{2}$ вправо, с вер $\frac{1}{2}$ вверх. Если пытаетесь выйти за пределы поля, остаётесь на месте. Если попадаете в дырку, умираете. С какой вероятностью вы дойдёте до клетки (n, m) живым?
   b) $p_{right} = \frac{1}{3}, p_{left} = \frac{1}{6}, p_{up} = \frac{1}{3}, p_{down} = \frac{1}{6}$.
      То есть, граф теперь содержит циклы и вообще непонятно, сходится ли процесс.
      С какой вероятностью мы в какой-то момент живым доползём до (n, m)?

8. **Онлайн**

   Вам дана матрица A, на вас онлайн сыпятся запросы y_i. Нужно находить $x \colon Ax = y_i$.

9. **(*) Матричная игра**

   Игра на матрице. Первый выбирает строку, второй столбец. Делают они это независимо, не зная, что делает соперник. Выигрыш первого игрока – число в матрице. Первый его максимизирует, второй минимизирует. Вероятностная стратегия для первого: выбрать такие вероятности для строк $p_1, \ldots, p_m$, чтобы математическое ожидание выигрыша не зависит от хода второго игрока. Найти любой такой вектор p. Не нужно максимизировать выигрыш.

10. **(*) Задача про XOR**

    Даны n чисел от 0 до $2^n - 1$. Выбирается случайное подмножество A этих n чисел.
    Найдите за $2^{n/2} \cdot poly(n)$ матожидание величины $\texttt{popcount}(\texttt{XOR}(A))^2$.
    Подсказка: ответ для $\{a_1, a_2\}$ равен ответу для $\{a_1, a_2\text{\^{}}a_1\}$

Разбор задач практики

1. **Разложение вектора в базисе**

   Раскладываем столбец b в базисе A (столбцы матрицы A – вектора базиса).

   a) Базис – произвольный набор линейно независимых векторов.
   Придётся за $\mathcal{O}(n^3)$ Гауссом решить систему $Ax = b$.

   b) Базис – трапецевиная матрица.
   Тогда метод Гаусса уже не нужен, достаточно восстановить x за $\mathcal{O}(n^2)$.

   c) Ортогональный базис. a_i – базисный вектор. Тогда $x_i = \frac{\langle b,a_i\rangle}{\langle a_i,a_i\rangle}$. $\mathcal{O}(n^2)$.
   Если базис ещё и ортонормированный, $|a_i| = 1$, то $x_i = \langle b, a_i\rangle$.

2. **Точка в параллелепипеде**

   Сдвинем один из углов параллелепипеда в точку 0. Стороны параллелепипеда, исходящие из точки 0, – вектора, образующие базис пространства. Разложим нашу точку в базисе. Точка внутри iff все координаты от 0 до 1.

3. **Найти расстояние от точки до подпространства**

   Пусть точка – b. Пусть $v = Ax$: $|Ax - b| = \min$

   a) Сделаем базис ортогональным. Вычтем из b проекции на все базисные вектора. Останется нормаль к пространству $b - v$.

   b) v – точка в подпространстве. Ищем такую точку v, что $v - b$ перпендикулярно всему пространству $\Leftrightarrow$ скалярные произведения со всеми векторами A равны нулю. Получаем $A^t(Ax - b) = 0 \Leftrightarrow x = (A^tA)^{-1}A^tb$.

   c) $|Ax-b| \to \min \Leftrightarrow (Ax-b)^2 \to \min$. Дифференцируем, приравниваем производную к нулю, получаем такое же уравнение, как в предыдущем пункте.

4. **Выбор базиса минимального веса**

   Будем добавлять вектора в порядке увеличения веса. Добавление работает за $\mathcal{O}(nk)$, где k – размер базиса, n – размерность пространства, если всего векторов m, получили $\mathcal{O}(nmk)$.

   Почему эта жадность верна?

   Пусть $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \ldots \leqslant w_n$ – веса векторов, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ – индексы в нашем ответе,
   $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ – индексы в таком оптимальном ответе, что $\texttt{LCP}(a, b) = \max$. Рассмотрим $\min i\colon a_i \neq b_i$. Странно, если $a_i > b_i$, мы могли добавить вектор b_i в базис. Возьмём линейно-независимый набор $\{a_1, a_2 \ldots, a_i\}$ и будем добавлять в него вектора из $\{b_i\}$.
   Успешно добавятся все вектора кроме одного... А вес не добавленного не менее w_{a_i}.

   Мы получили набор c: $(w(c) < w(b)) \vee (w(c) = w(b) \wedge \texttt{LCP}(a, c) > \texttt{LCP}(a, b))$. Противоречие.

5. **Найти реккурентность**

   Предполагаем, что $k \leqslant \frac{n}{2}$. Записываем систему $a_n = a_{n-1}x_1 + a_{n-2}x_2 \ldots, a_{n-1} = a_{n-2}x_1 + a_{n-3}x_2 + \ldots, a_{\frac{n}{2}+1} = \ldots$. В каждой правой части $\frac{n}{2}$ x-ов. Минимальное k равно рангу матрицы (без док-ва). Если мы знаем, что $k \leqslant m$, то записав систему $m \leqslant m$, мы можем найти m коэффициентов линейной реккурентности длины m.

Решение за $\mathcal{O}(n^3 \log n)$*:* бинпоиск по k, внутри Гаусс.
Решение за $\mathcal{O}(n^3)$*:* считаем ранг Гауссом (нашли k), затем запускаем ещё одного Гаусса (нашли коэффициенты).
Решение за $\mathcal{O}(nk + k^3 \log k)$*:* инкрементальный бинпоиск по k ($k = 1, 2, 4, \dots$).
Решение за $\mathcal{O}(nk + k^3)$*:* после того, как нашли правую границу бинпоиска, считаем ранг.

6. **Минимальное квадратичное**

   Найдём какое-нибудь решение $Ax_0 = b$. Искомое решение $x^* = x_0 - x$, где $Ax = 0$. Множество решений $Ax = 0$ – линейное подпространство. Теперь задача такая: найти в этом пространстве вектор x ближайший к x_0. См. задачу про расстояние до подпространства.

7. **Вероятность выжить**

   x_{ij} – вероятность выжить, начиная из клетки i, j.

   а) Динамика, т.к. граф ацикличен.
   б) Граф с циклами, но x_{ij} линейно выражается через соседей, поэтому решаем систему уравнений. Гаусс приемлем, но даст дикую погрешность, а вот метод итераций содержит только положительные коэффициенты, поэтому отработает без погрешности.

   Система: $x_{i,j} = \frac{1}{3}x_{i,j+1} + \frac{1}{6}x_{i,j-1} + \frac{1}{3}x_{i+1,j} + \frac{1}{6}x_{i-1,j}$, $x_{n,m} = 1$. Метод итераций: изначально все остальные $x_{i,j} = 0$, делаем переход $x \to A \cdot x$, чтобы ускорить $x \to A^{2^k} \cdot x$. Погрешности у метода итераций нет, так как все числа положительны (погрешность образуется при вычитании).

   p.s. Матожидания числа ходов обсуждать не нужно, это будет в дз.

8. **Онлайн**

   Для $\det A \neq 0$: находим за n^3 LU-разложение $A = LU$. Ответ на запрос за $\mathcal{O}(n^2)$: $x = L^{-1}U^{-1}y_i$

   Для произвольной системы, можно сделать обычного итеративного Гаусса, который для каждой строки таскает ещё и вектор коэффициентов, как строка выражается из исходных (длина $\leqslant \min(n, m)$). Важно запомнить не только строки базиса, но и не базисные, т.к. каждая задаёт условие вида $\sum_j y_{ij} = 0$, которое предстоит проверять для y_i.

9. **(*) Матричная игра**

   Пусть второй игрок выберет j-й столбец, тогда матожидание выигрыша равно $E_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_n a_{nj} = t$. Записываем уравнения $E_1 = E_2 = \dots = t$, где неизвестные $p_1, p_2, \dots, p_n, t$. Добавляем уравнение $\sum p_i = 1$.

10. **(*) Задача про XOR**

    Подсказка: ответ для $\{a_1, a_2\}$ равен ответу для $\{a_1, a_2 \hat{} a_1\}$. n n-битных чисел задают матрицу $n \times n$. Приведём её Гауссом к виду диагональ + прямоугольник треша (свободные переменные) + нулевые строки. Пусть ранг матрицы (длина диагонали) равен k. Заметим, что есть решение за 2^k и есть решение динамикой по строкам за $2^{n-k}k^2$. Получаем $2^{\min(k,n-k)}Poly(n) \leqslant 2^{n/2}Poly(n)$. Динамика: добавляем k строк по одной, важно, сколько мы выбрали единиц и какие значения у $n-k$ свободных переменных.

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(2+2) Винни-Пух и мёд**

   У Винни Пуха есть бесконечные запасы из k видов горшочков мёда. Каждый вид горшочков требует сколько-то дней от Пуха, чтобы съесть весь мёд из одного горшочка.

   Пух уже провёл серию экспериментов: брал несколько горшочков, записывал, какие горшочки взял, день недели, когда начал эксперимент, после чего съедал весь мёд и записывал день недели, когда эксперимент закончился. По понятным причинам Пух очень любит экспериментировать.

   А Кролик не любит мёд, но любит предсказывать будущее. Помогите Кролику, зная результаты k экспериментов, сказать, можно ли однозначно сказать результат следующего. Оцените время работы алгоритма.

   a) **(2)** Винни берёт произвольные множества горшков.
   b) **(2)** Винни всегда берёт горшки не более чем двух разных типов.

2. **(3) Matrix decomposition**

   Дана матрица A размера $n \times m$. Найти такое представление $A = BC$, что B имеет размер $n \times k$ и k минимально. *Подсказка: думайте про A, как про пространство строк.*

3. **(2) Расстояние в n-мерном пространстве**

   Даны m точек в n-мерном пространстве и k линейно независимых векторов, задающих подпространство. За $\mathcal{O}(kn(k+m))$ найти для каждой точки расстояние до подпространства.

4. **(3) Оптимальное представление точек**

   Даны $m \geqslant n$ n-мерных векторов, порождающих всё n-мерное пространство. Даны k запросов: выразить точку в виде линейной комбинации, минимизируя сумму квадратов коэффициентов. Ответить на все запросы за $\mathcal{O}((m+k)n^2)$.

5. **(4) Матожидание времени путешествия**

   Дана полоска из n клеток. Изначально мы в первой.
   Каждый ход выбирается случайное x из множества

   a) **(2)** $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$
   b) **(2)** $\{-\frac{k}{2}, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, k\}$

   И мы ходим $i \to \max(1, \min(i + x, n))$. Найти матожидание числа ходов до клетки n. Чем быстрее, тем лучше.

3.2. Дополнительная часть

1. **(3) Гаусс на многочленах**

   Дана квадратная матрица A из $n \times n$ элементов $\mathbb{R}[x]$. $k = \max\deg$ многочленов в матрице.

   a) **(1)** Найти её определитель за $\mathcal{O}(c^n \cdot \mathrm{poly}(k))$.
   b) **(2)** В предположении, что матрица не вырожденная, решите систему уравнений $Ax = b$.
   c) **(+1)** Найти её определитель за полином.

2. **(4) Разбиение графа на две доли**

   Дан неориентированный граф. Нужно разбить его вершины на две доли так, чтобы после удаления рёбер между долями степени всех вершин были чётны.

3. **(3) Пересечение сфер**

   Даны k n-мерных сфер. Найти все точки пересечения, или сказать, что их бесконечно много.

4. **(3) Матожидание пути**

   Дан грид со стенками и **дырками**, мы идём из $(1, 1)$ в (n, m).
   В каждый момент времени вероятности сдвинуться вправо и вверх равны $\frac{1}{3}$, а влево и вниз $\frac{1}{6}$.
   При попытки идти в стенку ничего не происходит. При попытки идти в дырку мы умираем.
   Грид таков, что мы или свалимся в дырку, или дойдём до конца.
   Пусть мы дошли до конца, не упав в дырку. Какая средняя длина пути была пройдена?

5. **(4) Максимальный равномерный поток**

   Поток называется равномерным, если для любых двух вершин a и b любые два пути из a в b, по которым течёт поток, имеют одинаковую длину (количество рёбер). Найдите в неорграфе максимальный равномерный поток.