

2 курс ПМИ, осень 2024/25  
Практика по алгоритмам #3

Потоки, потоки, потоки!

23 сентября

Собрано 27 сентября 2024 г. в 17:05

---

## Содержание

1. Потоки, потоки, потоки!	1
2. Разбор задач практики	3
3. Домашнее задание	6
3.1. Обязательная часть . . . . .	6
3.2. Дополнительная часть . . . . .	7

# Потоки, потоки, потоки!

Напомним, что такое *поточная сеть* (*flow network*). У нас есть:

1. Ориентированный граф  $G(V, E)$ .
2. Исток  $s \in V$  и сток  $t \in V$  ( $s \neq t$ ).
3. Пропускные способности  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .
4. Потоки по рёбрам и обратным рёбрам  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  (могут быть отрицательны).

И должны быть выполнены следующие свойства:

1.  $\forall e \in E \quad f_e = -f_{\bar{e}}$ , где  $\bar{e}$  обратное к  $e$
2.  $\forall e \in E \quad f_e \leq c_e$
3.  $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \quad \sum_{e: v \rightarrow x} f_e = 0$

Величина потока  $|f| = \sum_{e: s \rightarrow x} f_e = \sum_{e: x \rightarrow t} f_e$ .

У нас есть алгоритм Форда-Фалкерсона, который dfs-ом ищет дополняющий путь из  $s$  в  $t$  и, пока находит, пускает по нему поток. Для  $c_e \in \mathbb{Z}$  работает за  $\mathcal{O}(|f| \cdot E)$ .

## 1. Форд-Фалкерсон не такой уж и медленный

Оцените время работы алгоритма Форда-Фалкерсона на произвольном графе с *единичными* пропускными способностями.

## 2. Вершинно-непересекающиеся пути

Научитесь за  $\mathcal{O}(kE)$  находить  $k$  вершинно непересекающихся путей из  $s$  в  $t$ .

(a) в орграфе, (b) в неорграфе (P.S. 2 или 4 ребра?)

## 3. Восстановление матрицы

Даны суммы элементов матрицы в каждом столбце и каждой строке.

Восстановить матрицу при условии, что она составлена из целых чисел от 0 до 100.

## 4. Турнир

Дана матрица уже сыгранных матчей группового футбольного турнира «каждый с каждым». Ничьих не бывает. Победа даёт команде одно очко.

Можно ли так доиграть турнир, чтобы  $\forall i: i$ -я команда имела в итоге ровно  $a_i$  побед?

## 5. Крутая декомпозиция

Научитесь декомпозировать поток на пути за  $\mathcal{O}(VE)$ .

Указание: с лекции умеете за  $\mathcal{O}(E^2)$ , вспомните как, оптимизируйте.

## 6. Минимизация максимальной степени

Ориентировать данный неорграф так, чтобы  $\max$  исходящая степень была минимальна.

(a)  $\mathcal{O}(E^2 \log V)$ , (b)  $\mathcal{O}(E^2)$ .

## 7. Красно-синие вершины

Дан неорграф, какие-то вершины покрашены в красный, какие-то в синий. (a) докрасить оставшиеся, чтобы пар соседних разноцветных было поменьше. (b) число вершин, у которых есть сосед другого цвета,  $\rightarrow \min$ . (c) у вершин есть веса  $\sum w_v \rightarrow \min$ .

## 8. Взвешенные Cover, IS

Дан двудольный граф. У каждой вершины есть неотрицательный вес. Найти вершинное покрытие минимального веса, независимое множество максимального веса.

*Указание:* вспомните с лекции, как потоками искать в двудольном графе matching, IS, VC.

## 9. Замкнутое подмножество (лекции по матану)

Каждой вершине орграфа сопоставлено число (возможно, отрицательное) – её вес.

Подмножество вершин  $A$  называется *замкнутым*, если из него не исходят рёбра в  $V \setminus A$ .

Найдите замкнутое подмножество вершин максимального суммарного веса.

## 10. ФФ и экспонента

Пусть dfs при поиске дополняющего пути каждый раз заново выбирает порядок рёбер, и ему всё время не везёт. Постройте пример из  $\leq 10$  вершин и все  $c_e \in \mathbb{Z}$ , где ФФ, пускающий по пути  $\min_e (c_e - f_e)$  потока, найдёт  $\geq 10^9$  путей.

## 11. (\*) ФФ и бесконечный цикл

Пусть dfs при поиске дополняющего пути каждый раз заново выбирает порядок рёбер, и ему всё время не везёт. Постройте пример из  $\leq 10$  вершин и все  $c_e \in \mathbb{R}$ , где ФФ, пускающий по пути  $\min_e (c_e - f_e)$  потока, найдёт бесконечно много путей.

## 12. (\*) ФФ и математическая индукция

Докажите, что если порядок рёбра в dfs **фиксирован**, то на  $\mathbb{R}$  пропускных способностях ФФ всегда отработает за конечное время.

## 13. (\*) Декомпозиция на циклы

Научитесь декомпозировать циркуляцию на циклы за  $\mathcal{O}(VE)$ .

## 14. (\*) Разрез минимального среднего веса #1

Выбрать такое множество рёбер взвешенного орграфа, что после их удаления из  $s$  нет пути в  $t$ , а средний вес этих рёбер минимален.

## 15. (\*) Разрез минимального среднего веса #2

Найти разрез с  $\min$  средним весом – отношением суммарного веса рёбер к их количеству. Иными словами,  $\frac{C(S,T)}{E(S,T)} \rightarrow \min$ . Или доказать, что это NP-трудно.

## 16. (\*) Подграф максимальной средней степени

Дан неориентированный граф. Нужно выбрать множество вершин  $A$ :  $\frac{|E(A)|}{|A|} = \max$ .  $E(A)$  – число рёбер между вершинами множества  $A$ .

## 17. (\*) Уголки

Какое  $\max$  количество чёрных уголков можно разместить на шахматной доске  $n \times m$  с дырками? Чёрный уголок – фигура из трёх клеток: центральная клетка **чёрного цвета** и две смежных с ней по стороне белых клетки. При этом фигура  $1 \times 3$  – не уголок.

## Разбор задач практики

### 1. Форд-Фалкерсон не такой уж и медленный

$|f| \leq E \Rightarrow$  время работы  $\mathcal{O}(E^2)$ .

Точнее  $|f| \leq \min(\deg_s, \deg_t)$ . Без кратных ребер  $\mathcal{O}(VE)$ .

### 2. Вершинно не пересекающиеся пути

*Орграф*: раздваиваем вершину, посередине ребро пропускной способности 1, входящие рёбра в первую половину, исходящие из второй.

*Неорграф*: приводим к орграфу, делаем то же самое. Заметим, что ребро  $(a, b)$  превратится в граф из 4 вершин, 4 рёбер:  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow a_1$ .

### 3. Восстановление матрицы

*Коротко*: двудольный граф из строк и столбцов.

*Решение*. Соединяем с истоком  $n$  вершин-строк, на ребре пишем сумму в строке. Аналогично столбцы соединяем со стоком. Каждую строку соединяем с каждым столбцом, на ребре пишем 100. Числа на рёбрах – пропускные способности.

Пускаем max поток. Если какое-то из рёбер, соединенных со стоком и истоком, не насыщено, то ответа нет. Иначе ответ – поток на рёбрах, соединяющих строки и столбцы.

### 4. Турнир

*Коротко*: двудольный граф из команд и несыгранных матчей.

*Решение*. Заведём вершину для каждой команды, проведем в нее ребро из истока, пишем на нем число будущих побед этой команды. Заведём вершину для каждого еще не сыгранного матча, из нее ребро в сток, на ребре пишем 1. Проводим в каждый матч ребра из двух команд, которые в нем играют, на рёбрах 1. Пускаем max поток. Если из команды в матч течет 1, то команда выиграла этот матч. Если не насытилось какое-то ребро из истока в команду или из матча в сток, то так доиграть невозможно.

### 5. Крутая декомпозиция

Заставим dfs работать за  $\mathcal{O}(V)$ . Для этого

- Если dfs по ребру не нашёл путь, на обратном ходу рекурсии удалим ребро
- Если dfs заиклился, закончим dfs, отменим поток по циклу

В сумме  $k$  dfs-ов отработают за  $\mathcal{O}(E + kV) \Rightarrow$  декомпозиция за  $\mathcal{O}(VE)$ .

### 6. Минимизация максимальной степени

*Коротко*: рассмотрим двудольный граф «рёбра  $\rightarrow$  вершины».

Каждое ребро в зависимости от ориентации увеличит на 1 степень одного из концов.

Из истока  $s$  проводим ребро в каждую вершину исходного графа. Создаём для каждого ребра исходного графа по вершине, из них проводим рёбра пропускной способности 1 в сток. Если ребро  $e = \{u, v\}$ , то проводим рёбра  $u \rightarrow e$  и  $v \rightarrow e$  пропускной способности 1. Поток, пущенный по ребру  $u \rightarrow e$  будет означать, что  $e$  ориентировано от  $u$  к  $v$ .

Рёбер в новом графе  $V + 3E = \mathcal{O}(E)$ .

- а)  $\mathcal{O}(E^2 \log V)$ . Бинарный поиск по ответу: проверяем, можно ли  $d$ . Пишем  $d$  на рёбрах из  $s$  в вершины. Пускаем max поток, проверяем  $|f| = E$  исходного графа. Поток за  $\mathcal{O}(E \cdot |f|) = \mathcal{O}(E^2)$ .
- б)  $\mathcal{O}(E^2)$ . Пишем сначала  $d = 1$ , затем  $d = 2$ , и так далее, пока не найдётся поток размера  $E$ . При увеличении  $d$  мы для старого потока dfs-ом ищем новые пути, пока ищется.
- Время работы:*  $\leq V$  не удачных запусков dfs-а и  $\leq E$  удачных.

## 7. Красно-синие вершины

- (а) Синие = исток, красные = сток. Ищем min разрез.
- (б) Раздвоим вершины, исходные рёбра  $c_e = \infty$ , рёбра-вершины  $c_e = 1$ .
- (с) Поменяем  $c_e$  рёбер-вершин на вес вершин.

## 8. Взвешенные Cover, IS

Построим сеть для поиска паросочетаний: добавим слева исток и справа сток. Исходные рёбра сделаем веса  $+\infty$  и направим слева направо. Теперь есть биекция между  $(S, T)$ -разрезами без бесконечных рёбер и вершинными покрытиями:

$VC$  = вершины левой доли из  $S \cup$  вершины правой доли из  $T$ .

*Отсюда решение:* на ребре, соединяющем вершину  $v$  с истоком или стоком, пишем  $w_v$ , на рёбрах исходного графа пишем  $+\infty$ . Ищем min разрез.  $\max IS$  – дополнение к  $\min VC$ .

## 9. Замкнутое подмножество (лекции по матану)

Будем подгонять разрез в графе вида «исходные  $n$  вершин, исток, сток» под нашу задачу. Во-первых, каждое ребро исходного графа  $i \rightarrow j$  добавим с пропускной способностью  $+\infty \Rightarrow$  оно точно не войдёт в min разрез. Теперь подгоним пропускные способности из истока и в сток так, чтобы минимизация  $C(S, T)$  максимизировала  $W(S) = \sum_{v \in S} w_v$ .

Заметим, что  $S$  точно замкнуто благодаря бесконечным рёбрам.

Распишем  $W(S) =$

$$\sum_{v \in S, w_v \geq 0} w_v - \sum_{v \in S, w_v < 0} |w_v| = \sum_{w_v \geq 0} w_v - \sum_{v \notin S, w_v \geq 0} w_v - \sum_{v \in S, w_v < 0} |w_v| = \text{const} - \left( \sum_{v \notin S, w_v \geq 0} w_v + \sum_{v \in S, w_v < 0} |w_v| \right)$$

Хотим минимизировать то, что вычитается, а это ровно  $C(S, T)$  в графе, где из стока проведены ребра в положительные вершины, а из отрицательных в сток.

## 10. ФФ и экспонента

Пример из Кормена. Гуглится.

Ромбик из бесконечностей с единичкой по середине.

## 11. (\*) ФФ и бесконечный цикл

Пример из Кормена. Гуглится.

## 12. (\*) ФФ и математическая индукция

Рассмотрим первое ребро из  $s$ . Пусть это  $e: s \rightarrow v$ , сперва все пути будут проходить через  $e$ . Их по индукции для поточной сети  $\langle v \rightarrow t, V \setminus \{s\}, E \rangle$  конечное число. Рассмотрим первый момент, когда мы не нашли путь по  $e$ . Если  $f_e = c_e$ , оно уже никогда не рассытится (мы же не будем пушить по циклам  $s \rightarrow s$ )  $\Rightarrow$  дальше по индукции для  $\langle s \rightarrow t, V, E \setminus \{e\} \rangle$ . Иначе нет пути  $v \rightsquigarrow t$ . А его и не появится  $\Rightarrow$  дальше по индукции для  $\langle s \rightarrow t, V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\} \rangle$ .

13. (\*) **Декомпозиция на циклы**

*Коротко:* также, как декомпозиция на пути.

Из каждой вершины запускаем dfs, пока можем. dfs нашёл цикл – отменим по нему поток. За  $\mathcal{O}(E^2)$ , если совсем в лоб, за  $\mathcal{O}(VE)$ , если так же, как научились сегодня.

14. (\*) **Разрез минимального среднего веса #1**

Бинпоиск по ответу. Внутри пересчитаем веса (как в задаче «K-best»), возьмём жадно отрицательные рёбра, удалим их из графа, на оставшихся min cut.  $\mathcal{O}(\text{flow} \cdot \log \text{MAX})$

15. (\*) **Разрез минимального среднего веса #2**

Проверить, правда ли в графе есть разрез отрицательного веса (т.е. что ответ нашей задачи меньше 0) уже NP-трудно. Пусть все веса  $-1$ . Добавим одно ребро  $s \rightarrow t$  веса  $M$ . нам нужно найти  $(S, T): E(S, T) > M$ . Бинпоиск по  $M$  даст решение MAXCUT.

16. (\*) **Подграф максимальной средней степени**

Бинпоиск по ответу. Внутри приём, как в задаче «K-best»:  $\frac{E(A)}{|A|} \leq x \Leftrightarrow E(A) - x|A| \leq 0$ .  $B = V \setminus A$ , мы хотим выбрать пропускные способности, чтобы  $A: E(A) - x|A| = \min$ , находилось как минимальный разрез:  $S = A + \{s\}, T = B + \{t\}$ .

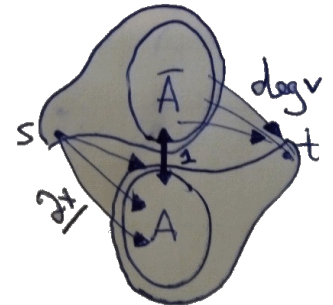
$E(A) = \frac{1}{2}(\sum_{a \in A} \text{deg}[a] - E(A, B))$ ,  $-x|A| = x|B| - x|V|$ ,  $x|V|$  – константа  $\Rightarrow$   
 Берём рёбра  $s \rightarrow v: x, v \rightarrow u: \frac{1}{2} \text{isedge}(v, u), v \rightarrow t: \frac{1}{2} \text{deg}[a]$ , ищем min разрез.

*Старое решение.*

Бинпоиск по ответу. Хотим найти такое  $A$ , что  $\frac{E(A,A)}{|A|} \geq x$ .

$$E(A, A) = E - E(A, \bar{A}) - E(\bar{A}, \bar{A}). \text{ Хотим } E \geq E(A, \bar{A}) + E(\bar{A}, \bar{A}) + x|A|.$$

$$2E \geq 2E(A, \bar{A}) + 2E(\bar{A}, \bar{A}) + 2x|A|. \quad 2E \geq E(A, \bar{A}) + \sum_A \text{deg}_v + 2x|A|.$$



Строим граф, где правая сторона неравенства будет разрезом. Добавим все рёбра исходного. Из истока рёбра пропускной способности  $2x$  во все вершины. Из каждой вершины  $v$  в сток рёбра пропускной способности  $\text{deg}_v$ . Разрезом будет  $(\{s\} \cup \bar{A}, \{t\} \cup A)$ .

17. (\*) **Уголки**

*Граф из четырех слоев:* белые клетки на чётных строках, раздвоенные черные, белые клетки на нечётных строках. И, конечно, исток и сток. Уголок = белая из чётной строки + чёрная + белая из нечётной строки  $\Rightarrow$  уголок = путь из истока в сток. Уголки не должны пересекаться  $\Rightarrow$  все рёбра пропускной способности 1 и найдём max поток.

*Время:*  $\mathcal{O}(\text{size}^2)$ , где  $\text{size}$  – площадь поля.

# Домашнее задание

## 3.1. Обязательная часть

### 1. (2) Единственность минимального разреза

Дан граф и выделенные вершины  $s$  и  $t$ . За  $\mathcal{O}(\text{Polynom}(V, E))$  проверить, правда ли, что существует **единственный** минимальный разрез?

### 2. (3) Грузовики. Непересекающиеся во времени пути

Дан ориентированный граф с начальной и конечной вершинами. В начальной вершине есть  $K$  грузовиков. Грузовикам нужно попасть в конечную вершину. Время дискретно. За единицу времени каждый грузовик или стоит на месте, или перемещается в одну из соседних вершин. В любой вершине могут одновременно стоять несколько грузовиков. По любому из рёбер в каждый момент времени должен ехать не более чем один грузовик. Минимизируйте время, когда все грузовики окажутся в конечной вершине.

a) (2)  $\mathcal{O}(\text{Polynom}(V, E, K))$

b) (1)  $\mathcal{O}(K(V + K)E)$

### 3. (3) Задача про трисочетание

Даны девочки, котики и собачки.

Для каждой пары «котик, девочка» известно, нравится ли девочке котик.

Для каждой пары «собачка, девочка» известно, нравится ли собачка девочке.

Нужно максимальному количеству девочек выделить по котик и собачке так, что:

a) каждый котик не более чем с одной девочкой;

b) каждая собачка не более чем у одной девочки;

c) девочка с выбранным ей котик, и собачка ей нравится.

### 4. (2) Цикл через данные вершины в неорграфе

Дан неориентированный граф.

Найти за  $\mathcal{O}(E)$  вершинно простой цикл, проходящий через две данные вершины.

### 5. (2) Цикл через данные вершины в орграфе

Докажите, что аналогичная задача в орграфе NP-трудна.

*Указание:* необходимо свести к ней задачу про два пути.

*Задача про два пути:* даны орграф и вершины  $A, B, C, D$ ; нужно найти не пересекающиеся по рёбрам пути  $A \rightarrow B, C \rightarrow D$ . Задача NP-трудна.

### 6. (3) Равномерное распределение

Есть  $n$  рабочих и  $m$  работ. И есть матрица умений: «какой рабочий какие работы умеет делать». Нужно максимально равномерно распределить работы между рабочими. То есть, каждой работе сопоставить рабочего, который умеет делать эту работу, а кроме того минимизировать  $\max_{i=1..n} k_i$ , где  $k_i$  – количество работ, выданных  $i$ -му рабочему.

## 3.2. Дополнительная часть

### 1. (2) Единственность разреза. $\mathcal{O}(E)$ .

Пусть дан какой-то максимальный поток.

- За  $\mathcal{O}(E)$  проверить единственность минимального разреза. С доказательством.
- За  $\mathcal{O}(E)$  найти минимальный разрез  $V = S \sqcup T: |S| = \max$ .

### 2. (3) Тест против Форда-Фалкерсона

Найдите ориентированный граф с целочисленными пропускными способностями, на которых детерминированный алгоритм Форд-Фалкерсона с **фиксированным порядком** перебора рёбер, пропускающий  $\min_e(c_e - f_e)$  по пути, работает за экспоненту от  $V$ .

(+2) балла за тест против ФФ, в котором перед каждым `dfs` делается `random_shuffle` рёбер.

### 3. (4) Япония. Инструменты и заказы.

Ситуация из Японии. Есть заказы и инструменты. Для каждого заказа известен список инструментов, который нужен, чтобы его выполнить. Каждый инструмент сделан умелыми японскими рабочими, поэтому бесконечно прочный, его можно один раз купить и много раз использовать. У каждого инструмента есть цена  $p_i$ . У каждого заказа есть прибыль, которую можно получить, выполнив заказ. Вы – бедный китайский рабочий. У вас изначально нет инструментов, но зато вы можете под нулевой процент в банке взять сколь угодно большой кредит, чтобы купить инструментов.

- (2) Вопрос: какую максимальную прибыль вы можете получить?
- (2) А теперь тот же вопрос, но ещё есть разные скидочные предложения! Скидка позволяет два инструмента  $i, j$  купить по специальной цене  $d$ :  $\max(p_i, p_j) < d < p_i + p_j$ . Каждый инструмент присутствует не более чем в одном скидочном предложении.