

Вопросы к экзамену по алгоритмам

SPb HSE, 2-й курс ПМИ, октябрь 2024

Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) темы на 3 (оценка 4-5).
- (b) темы на 4 (оценка 6-7).
- (c) темы на 5 (оценка 8-9).
- (+) факультативные темы (оценка 10) – нужно заботать 5 любых темы из 6.

Паросочетания

- (a) 1. Matching. Определения и сложность задач в двудольном и произвольном графе: паросочетание, вершинное покрытие, независимое множество, совершенное паросочетание.
- (b) 2. Matching. Татт. Связь паросочетаний и определителей. Теорема Татта (без док-ва).
- (c) 3. Matching. Татт. Алгоритмы. Есть ли совершенное? *Найти max размер. Найти паросочетание.*
- (a) 4. Matching. Лемма о дополняющем пути.
- (a) 5. Matching. dfs для дополняющего пути, простейший алгоритм за $\mathcal{O}(V(V+E))$.
- (b) 6. Matching. Алгоритм Куна. Доказательство. Сравнение с обычным.
- (b) 7. Matching. Версия алгоритма Куна за $\mathcal{O}(|M| \cdot E)$. Оптимизации: обнуление пометок за $\mathcal{O}(1)$, жадная инициализация.
- (c) 8. Matching. Оптимизация алгоритма Куна «вообще не чистить пометки». Сравнение с предыдущими оптимизациями. *Связь с жадной инициализацией.*
- (a) 9. Matching. Алгоритм поиска VC и IS за $\mathcal{O}(E)$. Без док-ва.
- (b) 10. Matching. Теорема Кёнига и доказательство корректности алгоритма поиска VC и IS.
- (c) 11. Matching. Применение Куна: вероятностный алгоритм поиска паросочетания в \forall графе.
- (a) 12. Matching. *Разбиение вершин орграфа на циклы. Разбиение вершин ациклического орграфа на минимальное число путей.*
- (c) 13. Matching. *Теорема Дилворта, поиск максимальной антицепи.*
- (c) 14. Matching. Классификация рёбер. MAYBE = {рёбра, которые могут лежать в паросочетании}.
- (c) 15. Matching. Классификация рёбер. NO (не могут), MUST (должны).
- (a) 16. Matching. Stable matching (marriage problem). Постановка задачи. Решение. Пример про ЕГЭ.
- (b) 17. Matching. Stable matching. Корректность решения. Реализация за $\mathcal{O}(V+E)$.
- (b) 18. Matching. *Stable matching. Оптимальность для девочек, для мальчиков, единственность.*
- (a) 19. Matching. Задача о назначениях. Венгерский алгоритм, простейшая реализация за $\mathcal{O}(V^4)$.
- (b) 20. Matching. Оптимизация Венгерского алгоритма до $\mathcal{O}(V^3)$ (потенциалы, быстрый выбор i, j).
- (c) 21. Matching. Оптимизация Венгерского алгоритма до $\mathcal{O}(V \cdot (E+V \log V))$. *Поиск оптимального паросочетания размера ровно k .*
- (a) 22. Покраски. Вершинные. Сложность задачи. Теорема Брукса (без док-ва).
- (b) 23. Покраски. Вершинные. Жадный практически ценный алгоритм за $\mathcal{O}(E \log V)$.
- (c) 24. Покраски. Вершинные. Планарный граф в 6 цветов за $\mathcal{O}(E \log V)$, в 5 цветов за $\mathcal{O}(VE)$.
- (a) 25. Покраски. Рёберная. Сложность задачи. Теорема Визинга (без док-ва). Связь с паросочетанием.

- (a) 26. Покраски. Рёберная. Двудольный граф. Регулярный за полином. Доказательство.
- (b) 27. Покраски. Рёберная. Двудольный граф. Регулярный за $\mathcal{O}(E^2)$, произвольный за $\mathcal{O}(V^2 D^2)$.
- (c) 28. Покраски. Рёберная. Произвольный двудольный за $\mathcal{O}(E^2)$.

Потоки

- (a) 29. Flow. *Def*: поток, разрез, величина потока, величина разреза, остаточная сеть, циркуляция, прямые и обратные рёбра, декомпозиция потока.
- (a) 30. Flow. Алгоритм Форда-Фалкерсона. Время работы. Без доказательства.
- (b) 31. Flow. Теорема Форда-Фалкерсона. Доказательство.
- (a) 32. Flow. Поиск min разреза по max потоку за $\mathcal{O}(E)$.
- (b) 33. Flow. Эффективное хранение графа (интрузивный список, пары рёбер).
- (a) 34. Flow. Декомпозиция потока на пути за $\mathcal{O}(E^2)$. Циркуляция.
- (b) 35. Flow. *Декомпозиция потока за $\mathcal{O}(VE)$* .
- (a) 36. Flow. Решение задачи про k непересекающихся по рёбрам/вершинам путей.
- (a) 37. Flow. Поиск паросочетания через поток за $\mathcal{O}(VE)$.
- (c) 38. Flow. Паросочетание. Связь вершинного покрытия с разрезом. *Вершинное покрытие минимального веса*.
- (b) 39. Flow. Лемма о разности потоков. Остаточная сеть.
- (b) 40. Flow. Алгоритм Эдмондса-Карпа. Существование max потока при $c_e \in \mathbb{R}$. Время работы, часть доказательства.
- (b) 41. Flow. Алгоритм Эдмондса-Карпа. Доказательство леммы про рост расстояний.
- (b) 42. Flow. Алгоритм масштабирования потока. Время работы, доказательство.
- (c) 43. Flow. Алгоритм Диница. Время работы, доказательство.
- (c) 44. Flow. Алгоритм Диница с масштабированием. Время работы, доказательство.
- (c) 45. Flow. Алгоритм Диница с *link-cut-tree*. Время работы, доказательство.
- (c) 46. Flow. Алгоритм Хопкрофта-Карпа поиска паросочетаний.
- (c) 47. Flow. 1-я теорема Карзанова $\mathcal{O}(\sqrt{C})$.
- (c) 48. Flow. 2-я теорема Карзанова $\mathcal{O}(U^{1/3}V^{2/3})$.
- (b) 49. Flow. $[L, R]$ -циркуляция за $\mathcal{O}(flow)$.
- (b) 50. Flow. $[L, R]$ -flow, $[L, R]$ -max-flow за $\mathcal{O}(flow)$.
- (a) 51. Flow. Глобальный разрез: определение, базовое решение за $\mathcal{O}(V \cdot flow)$.
- (b) 52. Flow. Глобальный разрез: алгоритм Штор-Вагнера без доказательства.
- (b) 53. Flow. Глобальный разрез: алгоритм Каргера-Штейна за $\mathcal{O}(V^4)$. Обоснование времени.
- (c) 54. Flow. Глобальный разрез: алгоритм Каргера-Штейна за $\mathcal{O}(V^2 \log^2 V)$. Обоснование времени.
- (a) 55. Flow. *Транспортная задача. Формулировка с $\forall c_e$ и $c_e = +\infty$. Решение*.
- (a) 56. Flow. Задачи mincost k -flow, mincost max flow, mincost circulation. Сведения друг к другу.
- (a) 57. Flow. Алгоритм для поиска mincost k -flow в графе без отрицательных циклов за $\mathcal{O}(k \cdot \text{FordBellman})$. Без док-ва.
- (a) 58. Flow. Поиск паросочетания min/max веса через mincost потоки.
- (b) 59. Flow. Критерий оптимальности mincost k -flow. Доказательство.
- (b) 60. Flow. Алгоритм для поиска mincost k -flow. Корректность.
- (b) 61. Flow. Mincost k -flow в графе без отрицательных циклов за $\mathcal{O}(\text{FordBellman} + k \cdot \text{Dijkstra})$. Доказательство.
- (a) 62. Flow. Графы с отрицательными циклами. Алгоритм Клейна.
- (b) 63. Flow. ММСС. Алгоритм, *оценка времени работы* без доказательства.

- (c) 64. Flow. Capacity Scaling за $\mathcal{O}(E \cdot \text{Dijkstra} \cdot \log U)$.
- (c) 65. Flow. Задача mincost flow: решения через итеративного Форд-Беллмана, через сведение к циркуляции.

Строки

- (a) 66. String. Префикс функция. КМП для поиска подстроки.
- (a) 67. String. Префикс функция. Поиск всех периодов в строке.
- (b) 68. String. LCP за $\mathcal{O}(n^2)$.
- (b) 69. String. Z-функция. Поиск подстроки в строке.
- (b) 70. String. Z-функция. Поиск всех периодов строки.
- (c) 71. String. Алгоритмы Бозера-Мура (две оптимизации) поиска подстроки в строке за сублинейное время.
- (a) 72. String. Хеши. Полиномиальный хеш, хеш подстроки за $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(1) \rangle$.
- (a) 73. String. Хеши. Алгоритм Рабина-Карпа поиска подстроки в строке с $\mathcal{O}(1)$ допамяти.
- (a) 74. String. Хеши. Общие слова про хеширование. RP и ZPP версии Рабина-Карпа.
- (a) 75. String. Хеши. Каким хешом пользоваться и почему? (доказательство не нужно, пару слов в обоснование)
- (b) 76. String. Хеши. Связь с корнями многочленов, оценки $\frac{|s|}{M}$ в худшем и $\frac{1}{M}$ в среднем.
- (b) 77. String. Хеши. Вероятность ошибки для k сравнений подстрок хешами.
- (c) 78. String. Хеши. Оценки вероятности ошибки для Рабина-Карпа.
- (c) 79. String. Хеши. Оценки для двух вариантов «количества различных подстрок».
- (a) 80. String. Хеши. Наибольшая общая подстрока за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- (b) 81. String. Хеши. Поиск LCP и построение суффмассива за $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.
- (b) 82. String. Поиск в тексте с одной ошибкой.
- (c) 83. String. Хеши. Поиск в словаре с одной ошибкой.
- (c) 84. String. Палиндромы. Подсчет числа за $\mathcal{O}(n \log n)$, самый длинный за $\mathcal{O}(n)$.
- (c) 85. String. Палиндромы. Алгоритм Манакера.

Бонус

- (+) 86. Flow. Push-relabel. Общая схема. Корректность и конечность.
- (+) 87. Flow. Push-relabel. Оценка $\mathcal{O}(VE)$ на почти все операции. Версия за $\mathcal{O}(V^3)$.
- (+) 88. Flow. Push-relabel. Global Relabeling (без док-ва времени).
- (+) 89. Flow. Push-relabel. Алгоритм Ahuja за $\mathcal{O}(VE + V^2 \log U)$.
- (+) 90. Flow. Cost Scaling: push-relabel для mincost потоков: общая схема.
- (+) 91. Flow. Cost Scaling: push-relabel для mincost потоков: время работы.