SPb HSE, 1 курс, весна 2024/25
Практика по алгоритмам #31

Игры
4 июня

Собрано 31 мая 2025 г. в 14:50

Содержание

Игры

Вы думаете, что я вас не переиграю, что я вас не уничтожу? Я вас уничтожу.

Маэстро

1. **Продление удовольствия**

   Дана игра на орграфе. Предложите стратегию для выигрывающего, при которой игра длится максимально долго. То есть проигрывающий стремится проиграть как можно быстрее (если только ему не предоставят возможность выиграть :)), а выигрывающий выигрывать как можно дольше. Причем если есть возможность играть бесконечно, находясь всегда в выигрышной позиции, нужно ей пользоваться (садизм).

2. **Бюрократия**

   Нам нужно подписать некоторый набор документов. Есть зависимости. Чтобы подписать документ номер i, нужно сначала подписать документы $a_1, a_2, \ldots, a_{m_i}$. Ситуация настолько печальна, что могут быть циклы. В моменты времени $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ происходят чудеса – самоподписываются бумаги $i_1, i_2, \ldots$! (в t_1 подпишется i_1 и т.д.)
   Любой документ мгновенно подписываются в тот же момент, когда уже подписаны все нужные для неё. Выяснить для каждого документа, в какой момент времени он будет подписан.

   (*) Усложнение: если документ вступает в силу (удовлетворит вышестоящие зависимости) только через минуту после подписи.

3. **Симметрия**

   Игроки по очереди закрашивают клетки в сетке $n \times n$, нельзя закрашивать две клетки с общей стороной. Предложить выигрышную стратегию для одного из игроков.

   (а) n нечётно, (б) n чётно.

4. **Отравленная шоколадка и симметрия**

   Есть квадратная шоколадка с отравленной левой нижней долькой. За ход можно ткнуть в любую ещё существующую дольку и съесть всё, что находится (а) «не ниже и не левее». Кто ткнул в отравленную умирает и проигрывает. Предложить выигрышную стратегию для одного из игроков. (б) «не ниже *или* не левее»

5. **(*) Симметрия и прямоугольник площади не более k**

   Игроки по очереди закрашивают прямоугольники в сетке $n \times m$, один ход – закрасить прямоугольник площади не более k, состоящих из непокрашенных ранее клеток. Для каждой комбинации n, m, k предложить выигрышную стратегию для одного из игроков.

6. **Симметричная игра на деке**

   Есть ряд из n конфет, у каждой конфеты есть вкусность a_i. Каждый игрок может в свой ход съесть крайнюю справа или слева конфету. Какой максимальной суммарной вкусности может добиться каждый игрок? $\mathcal{O}(n^2)$.

7. **Игра на деке**

   Есть ряд из n конфет, у каждой конфеты есть две вкусности a_i для Алисы и b_i для Боба. Алиса и Боб ходят по очереди. За свой ход можно съесть крайнюю справа или слева конфету. Цель каждого из участников максимизировать разность «суммарная вкусность съеденного мной минус суммарная вкусность съеденного соперником». $\mathcal{O}(n^2)$.

8. **Скамейки**

   Есть длинный ряд из n сидячих мест. Две команды по очереди сажают одного из своих участников на свободное место, все соседи которого свободны. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитайте функцию Гранди игры в зависимости от числа мест. А что делать, если n до 10^{18}?

9. **Малыш и Карлсон**

   Малыш и Карлсон едят трёхмерную шоколадку из $n \times m \times k$ долек. Каждый по очереди разламывает её на два куска (не ломая дольки) и съедает меньший из двух кусков. Когда остается одна долька, очередной игрок съедает её и (а) проигрывает, (б) побеждает. Посчитайте функцию Гранди в зависимости от размеров шоколадки.

10. **Хакенбуш**

    Дано корневое дерево. Игроки по очереди отрезают у дерева некоторое ребро, при этом пропадает компонента связности, не содержащая корень. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитать функцию Гранди.

11. **(∗) Ним с разбиением кучек**

    Ним. В свой ход можно взять сколько-то камней из одной из кучек, а можно разбить одну из кучек на несколько произвольным образом. Посчитать функцию Гранди.

12. **(∗) 3-ним**

    Ним, в котором игрок может брать камни сразу из двух кучек, причем из каждой свое число камней. Посчитать функцию Гранди.

13. **(∗) Misere Nim**

    Ним с несколькими кучками, в котором выигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при оптимальной игре?

14. **(∗) Игра Витхоффа**

    Ним из двух кучек, можно брать либо из одной кучки, либо сразу из двух, но одинаковое число камней. Кто выиграет при правильной игре? $a, b \leqslant 10^{18}$.

Разбор задач практики

1. **Продление удовольствия**

   Запустим ретроанализ, поймём, какие вершины проигрышные, выигрышные, ничейные.
   Выкинем из графа неинтересные ребра, оставим только $\texttt{W} \to \texttt{L}$ и $\texttt{L} \to \texttt{W}$.
   Запустим ретроанализ наоборот, считая по пути длину игры.
   Из выигрышной вершины нужно идти в проигрышную с максимальной длиной (последнюю в порядке обхода). Из проигрышной – в выигрышную с минимальной длиной (первую в пордяке обхода). Как раз и вышел ретроанализ наоборот.
   Те вершины, которые второй ретроанализ сочтёт ничейными, – $\texttt{W}^\infty$ и $\texttt{L}^\infty$.

2. **Бюрократия**

   Обработка с очередью, по аналогии с ретроанализом. Если для бумаги i нужна j, ребро $j \to i$. Подписанную бумагу кладем в очередь. Вынимая бумагу из очереди, удаляем все ребра из нее. Если у бумаги занулилась входящая степень, она подписана.

   (*) А тут нужно для каждого момента t хранить очередь $q[t]$ событий в момент t, и перебирать очереди в порядке $t \neq$

3. **Симметрия**

   Нечётное. Первый игрок закрашивает центр. Дальше он всегда может сделать ход, симметричный ходу второго относительно центра.

   Чётное. Всегда может сделать ход, симметричный ходу первого относительно центра.

4. **Отравленная шоколадка и симметрия**

   Отравлен $(1, 1)$, первый ход в $(2, 2)$. Далее есть две полоски $1 \times (n-1)$, поэтому первый может отвечать второму симметрично и выигрывает.

   Если «или», то смотрим на $(w-1) \oplus (h-1)$. По каждой координате независимая игра: уменьшить от начального значения до 1. Конец игры 1×1.

5. **(*) Симметрия и прямоугольник площади не более k**

   $k = 1$ разобран выше. n, m нечётны тоже выше. Ровно одно из двух нечётно – первым ходом 1×2 в центре, далее симметрия. n, m чётны и k хотя бы 4 – первым ходом 2×2 в центре, далее симметрия. Остался случай n, m чётны и k равно 2 или 3... Не существует прямоугольника (именно прямоугольника!) площади не более k, который покрывает две центрально симметричные клетки $\Rightarrow$ второй выиграет симметричной стратегией.

6. **Симметричная игра на деке**

   $f[l, r]$ – максимальная разность выигрышей, которую может достичь игрок, начинающий с отрезка $[l, r]$. $f[l, r] = \max(a[l] - f[l + 1, r], a[r] - f[l, r - 1])$.

7. **Игра на деке**

   Тоже динамика по подотрезкам. Тоже храним разность. «Кто ходит» однозначно понятно из чётности длины отрезка.

8. **Скамейки**

   $g[n] = mex\{g[n-2], g[n-3], g[n-4]\hat{}g[1], g[n-5]\hat{}g[2], \ldots\}$.

   Посчитаем для малых n, найдём закономерность, увидим, что циклится с периодом 34.

9. **Малыш и Карлсон**

   Это прямая сумма игр на одномерных шоколадках $g[n]\hat{}g[m]\hat{}g[k]$.
   Для одномерной считаем Гранди по определению через mex за квадрат.

   Если «$1 \times 1 \times 1$» – выигрышное состояние, то очевидно следует из функии Гранди, т.к. $f[0] = 0$, $f[1] = 1$ А вот если «$1 \times 1 \times 1$» – проигрышное состояние, то, оказывается Гранди тоже работает. Но только в $3D$, а в $2D$ не работает. Магия.

10. **Хакенбуш**

    Если степень корня больше 1, то представим игру, как прямую сумму независимых.
    Иначе $g(\text{root} \to T) = g(T) + 1$, легко показать по индукции.

11. **(*) Ним с разбиением кучек**

    Для состояния n можно посчитать `mex` по определению. Тогда размер множества под mex-ом – количество разбиений числа n на слагаемые. Это решение подойдёт при $n \leqslant 50$.
    Более красивое решение: динамика за $\mathcal{O}(xor \cdot n^2)$, работающая быстро в предположении, что $xor = \mathcal{O}(n)$. Динамика `is[xor, n]` – для каждого `xor`-а функций Гранди считаем, можно ли его получить: отделить одно слагаемое `is[xor, n] |= is[xor^a, n - a]`.

12. **(*) 3-ним**

    Проигрышная позиция: поразрядная сумма по модулю 3 записей чисел в троичной системе счисления равен нулю.

13. **(*) Misere Nim**

    Всё необходимое содержится в основной статье про Ним на wiki.

14. **(*) Игра Витхоффа**

    Забавно, но проигрышными являются позиции $\langle x, y\rangle\colon \frac{x}{y} \approx \varphi$ (золотое сечение).

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(2) Ретроанализ для суммы**

   Есть две игры $\langle G_1, v_1\rangle, \langle G_2, v_2\rangle$. Примените ретроанализ для их прямой суммы. Оцените время и память.

2. **(2) Хорды**

   Дана окружность с отмеченными на ней n точками. Игроки по очереди соединяют какую-нибудь пару точек хордой так, чтобы она не пересекала уже проведенные (даже в концах). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитать функцию Гранди.

3. **(2) Ним с делением пополам**

   Разрешим в Ниме делить кучку на две равные части. Кто выиграет при оптимальной игре?

   $n \leqslant 10^5$, $a_i \leqslant 10^9$

   Если вам не очевидно, как достаточно быстро решать задачу, попробуйте закодить более медленное решение и внимательно посмотрите на числа.

4. **(2) Игра в спички**

   Даны n стеков из спичек. В i-м стеке a_i спичек.
   За ход можно взять от 1 до k спичек из любого стека.
   Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто выиграет при оптимальной игре? $\mathcal{O}(n)$.

3.2. Дополнительная часть

1. **(2) Максимальное число Гранди**

   Какое максимальное значение функции Гранди в графе с m ребрами?
   Приведите пример, на котором достигается максимум, и доказательство, что больше нельзя.

2. **(3) Упорядоченный Ним**

   Дан массив размеров кучек $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, двое играют в Ним с запретом нарушать неравенства. Кто выиграет при правильной игре? $\mathcal{O}(n)$.

3. **(3) Ним с делением**

   Двое играют в Ним с дополнительным ходом: можно делить любую кучку на любые две части. Кто выиграет? $\mathcal{O}(n)$.