SPb HSE, 1 курс, зима 2024/25
Практика по алгоритмам #20

Ford-Bellman, Floyd

25 февраля

Собрано 24 февраля 2025 г. в 23:16

Содержание

Ford-Bellman, Floyd

1. **Сложности простого пути**

   Пусть в орграфе разрешены отрицательные циклы. Докажите, что задача поиска кратчайшего *простого* пути NP-трудна.

2. **Кратчайший цикл**

   Найти в невзвешенном графе кратчайший цикл за $\mathcal{O}(VE)$.
   (а) орграф, (б) неорграф

3. **Дерево кратчайших путей**

   Дан орграф без отрицательных циклов (отрицательные ребра могут быть) и расстояния от s до всех вершин в графе. Восстановить дерево кратчайших путей за $\mathcal{O}(E)$.

4. **Порог достижимости**

   Для каждой пары вершин в графе найти $w[a, b]$ – такой минимальный вес, что из a в b есть путь по рёбрам веса $\leqslant w[a, b]$.

5. **Система неравенств**

   Дана система из m неравенств на n переменных вида $x_i - x_j \le \delta_{ij}$.
   Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $\mathcal{O}(nm)$.

6. **Система неотрицательных неравенств**

   Пусть все $\delta_{ij} \geqslant 0$, $x_0 = 0$, нужно найти решение: $\sum_i x_i \to \max$. Или сказать, что сумма не ограничена. $o(nm)$. *Только решите. Доказывать корректность не обязательно.*

7. **Отрицательные циклы**

   Для каждой вершины графа узнать, есть ли отрицательный цикл через нее.

   Подумайте про переполнения (overflow, underflow) типа.

8. **Обмен валют**

   Есть n валют и m обменников. i-й обменник предлагает менять валюту a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i. Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные m обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты. $\mathcal{O}(nm)$.

9. **Число путей заданной длины**

   Есть ограф. Нужно найти количество необязательно простых путей из a в b при $k, l, r \leqslant 10^9$.
   (a) длины ровно k, (b) длины не более k, (c) длины от l до r.

10. **Великий генератор**

    Представьте, что вам нужно стресс-тестить какого-нибудь Форд-Беллмана. Откуда берутся графы без отрицательных циклов? Предложите алгоритм генерации случайного графа

    a) с отрицательными рёбрами, но без отрицательных циклов.
    b) с отрицательными рёбрами, без отрицательных циклов, с ровно одним циклом веса 0.
    c) с отрицательными рёбрами, с ровно одним отрицательным циклом.

11. **Дейкстра вышел погулять**

Дан взвешенный орграф (n,$m \leqslant 10^5, w_e \leqslant 0$). Если мы стартуем в s, идём по некоторому пути и останавливаемся в v, мы получим удовольствие $a_v + w(path(s,v))$. Для каждой вершины графа скажите, по какому ребру начать идти, чтобы получить максимальное удовольствие от прогулки?

12. **(*) Форд-Беллман и число итераций**

Пусть алгоритм Беллмана-Форда на каждой итерации рассматривает ребра в таком порядке:

1. Рёбра из меньшей вершины в большую в порядке *возрастания* номера исходящей вершины.
2. Рёбра из большей вершины в меньшую в порядке *убывания* номера исходящей вершины.

Докажите, что алгоритм найдет все кратчайшие пути за $\frac{n}{2}$ итераций.

13. **(*) Форд-Беллман и число итераций - 2**

Вспомним задачу «*Форд-Беллман и число итераций*». Перенумеруем вершины в случайном порядке. Докажите, что матожидание числа итераций не более $\frac{n}{3}$.

14. **(*) Дейкстра с отрицательными ребрами**

a) Докажите, что Дейкстра работает не дольше $\mathcal{O}^*(2^V)$.
b) Докажите, что если веса рёбер полиномиально ограничены от (V, E), то Дейкстра работает за полином от (V, E).
c) Постройте ацикличный орграф с отрицательными рёбрами без отрицательных циклов, на котором Дейкстра работает за $2^{\Omega(V)}$.

15. **(*) Форд-Беллман с очередью**

Постройте ацикличный орграф, на котором этот алгоритм работает за $\Omega(VE)$.

16. **(*) Реальная задача**

Дан взвешенный граф, длина пути из k рёбер $= A \cdot k + B \cdot \sum w_e$. Константы $A, B > 0$, но не даны. Для каждого ребра e проверьте, $\exists$ ли такие A, B, что e не лежит ни на одном кратчайшем пути.

17. **(*) Поиск слова в грамматике**

Дана контекстно-свободная грамматика. Проверить, можно ли вывести в ней строку, в которой букв «a» больше чем букв «b».

Разбор задач практики

1. **Сложности простого пути**

   Дан орграф. Найдём гамильтонов путь: сделаем все веса -1 и найдём минимальный по весу простой путь, проверим, что он $-n+1$.

2. **Кратчайший цикл**

   Орграф: `bfs` из каждой вершины, смотрим первый момент, когда вернулись в стартовую вершину. $\mathcal{O}(VE)$.

   Неорграф. Из каждой вершины запускаем `bfs`. Каждое не древесное ребро образует цикл. $\mathcal{O}(VE)$. Когда мы запустим `bfs` из вершины цикла, мы найдём кратчайший цикл. Если это не простой цикл, то существует цикл короче, противоречие.

3. **Дерево кратчайших путей**

   Остовное дерево dfs по ребрам $e = (v, u)$, где $d[v] + w_e = d[u]$.

4. **Порог достижимости**

   Флойд: `relax(d[i,j], max(d[i,k], d[k,j]))`. $\mathcal{O}(V^3)$.
   «Джонсон». Заметим, что если вес пути равен max ребру, то Дейкстра работает даже с отрицательными ребрами. Т.е. никаких потенциалов не надо, просто Дейкстра из каждой вершины. $\mathcal{O}(VE \log V)$ (в теории $\mathcal{O}(VE + V^2 \log V)$).

   Еще решение (снм): добавляем ребра в пустой граф в порядке возрастания.
   Если ребро e соединяет разные компоненты C_1, C_2, то его вес – ответ
   для всех пар $a \in C_1, b \in C_2$. Выставим им ответ перебором пар за $|C_1| \cdot |C_2|$.
   Поскольку каждой паре ответ запишется только один раз, это даст в сумме $\mathcal{O}(V^2)$.
   Итого $\mathcal{O}(sort(E) + V^2 + E \cdot T(\text{dsu}))$. DSU изучим в будущем.

5. **Система неравенств**

   $x_i - x_j \leqslant \delta_{ij}$. Заметим сходство с кратчайшими расстояниями в орграфе: для любого ребра $e\colon u \to v$ верно $d[v] - d[u] \leqslant w[e] \Leftrightarrow d[u] + w[e] \geqslant d[v]$.

   Итого решение – строим граф из n вершин, для каждого неравенства $x_i - x_j \leq \delta_{ij}$ проводим ребро $j \to i$ веса δ_{ij}. Также добавим фиктивную вершину s и ребра веса 0 из нее во все, запускаем Форда-Беллмана из s, возвращаем $x_i = d[i]$. Если нашелся отрицательный цикл, у системы нет решения (сложим неравенства по циклу, получим $0 \leqslant \sum \delta_e < 0$, противоречие).

   s можно не добавлять, просто начать Форд-Беллмана с массива d, заполненного нулями.

6. **Система неотрицательных неравенств**

   Как прошлая задача, но Дейкстра из вершины 0, ибо ребра неотрицательны.
   Если есть вершины, не достижимые из 0, то сумма не ограничена, им всем можно дать сколь угодно большой вес.

   Доказательство в задаче дз.

7. **Отрицательные циклы**

   Флойд, *простой* цикл есть у тех v, у которых $d[v, v] < 0$.

   С необязательно простым циклом интереснее. Нужно из каждой v проверить, есть ли $u\colon d[u, u] < 0$ в одной компоненте сильной связности с v. Компоненты сильной связности можно тоже строить Флойдом (транзитивное замыкание).

Могут быть underflow. Поэтому релаксация должна выглядеть так:
`d[i,j] = max(INT_MIN / 2, min(d[i,j], d[i,k] + d[k,j]))`

8. **Обмен валют**

Обменник валюты a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i – ребро из a_i в b_i с весом c_i/d_i.
Нас интересует цикл, на котором произведение весов ребер больше 1. Тогда сумма минус логарифмов там меньше нуля, отрицательный цикл.

Метод итераций. Можно итеративно улучшать массив количеств валют, пока улучшается. Если итераций больше n, есть цикл, который восстанавливается как в Форд-Беллмане.

9. **Число путей заданной длины**

$d_k[v]$ – число путей $a \rightsquigarrow v$ длины k.
$d_k[v] = \sum\limits_{(u,v)\in E} d_{k-1}[u] = \sum C[u,v] \cdot d_{k-1}[u]$, где C – матрица смежности.
$d_k = C \cdot d_{k-1} = C^k \cdot d_0$. Считаем это за $\mathcal{O}(V^3 \log k)$.
Если хотим пути длины $\leqslant k$, добавляем вершину s с петлёй и ребро $s \to a$.
$\texttt{count}[l,r] = \texttt{count}[0,r] - \texttt{count}[0,l-1]$.

10. **Великий генератор**

(a) Сгенерим граф с неотрицательным рёбрами из $[0,C]$.
Добавим потенциалы из $[-C,C]$, получим граф с рёбрами из $[-C,2C]$ без отрицательных циклов (потенциалы не меняют веса циклов).

(b) Сгенерим граф с положительными рёбрами из $[1,C]$.
Добавим туда нулевой цикл, добавим потенциалы из $[-C,C]$.

(c) Сгенерим граф с положительными рёбрами из $[1,C]$.
Добавим туда нулевой цикл, одно его ребро заменим на -1, добавим потенциалы из $[-C,C]$.

11. **Дейкстра вышел погулять**

Можно как будто для каждой вершины запустить Дейкстру, но это долго.
Можно пустить одну Дейкстру «с конца»: изначально $d_v = -a_v$, кидаем всех в кучу, и запускаем Дейкстру по обратным рёбрам.

12. **(*) Форд-Беллман и число итераций**

Худший случай – дерево кратчайших путей есть путь длины n. За одну итерацию мы будем прыгать в следующий локальный минимум. Локальных минимумов больше всего на пилообразной последовательности, $\frac{n}{2}$.

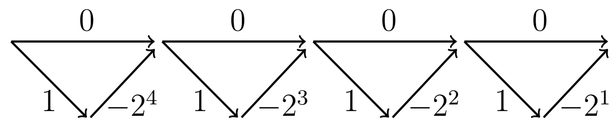
13. **(*) Форд-Беллман и число итераций - 2**

Вероятность для каждой вершины, что она – локальный минимум ровно $\frac{1}{3}$ (она должна быть меньше обоих соседей). Итого матожидание числа локальных минимумов $\frac{n}{3}$.

14. **(*) Дейкстра с отрицательными ребрами**

    a) В каждый момент времени в куче есть вершина (обозначим v), расстояние до которой посчитано верно. До момента «вынули v из кучи» процесс эквивалентен «Дейкстре на $V-1$ вершине» (v в нём не участвует), после вынимания v из кучи аналогично (v в процессе не участвует). Получили $N(V) \leqslant 2N(V-1) + 1 \Rightarrow N(V) = \mathcal{O}(2^V)$, где $N(V)$ – максимальное количество выниманий из кучи на графе из V вершин.

b) Пример с $2^{\Omega(V)}$. Серия треугольников с ребрами $a \xrightarrow{0} b$, $a \xrightarrow{1} x$, $x \xrightarrow{-2} b$, Ребро веса 0 ведет в следующий треугольник. очередной треугольник нужно домножать на 2^k. Итого $\Omega(2^{V/2})$.



15. **(*) Форд-Беллман с очередью**

Сделаем так, чтобы $V/2$ вершин попали в очередь $V/2$ раз.
Вершины $1, 2, \ldots, V/2$ образуют бамбук.
Из вершины $V/2$ есть ребра во все $V/2+1, V/2+2, \ldots, V$.
На вершинах $V/2+1, V/2+2, \ldots, V$ есть клика с бесконечными ребрами.
На вершинах $V/2+1, V/2+2, \ldots, V$ есть бамбук веса из нулевых рёбер. Из вершин $1, 2, \ldots, V/2-1$ есть бесконечные ребра во все $V/2+1, V/2+2, \ldots, V$.
Тогда после каждой вершины $1 \leqslant i \leqslant V/2$ в очередь будут попадать $V/2+1, V/2+2, \ldots, V$ и релаксироваться.

16. **(*) Реальная задача**

?

17. **(*) Поиск слова в грамматике**

Для каждого нетерминала храним $d[A] = \max$ разности между числом букв «a» и «b» мы уже добились.
Перебираем правила $A \to \alpha$, релаксируем $d[A]$ тем, что получается из правила $(\sum_{i\in\alpha} d[i]$.
Сколько итераций нужно делать? Утверждается, что процесс похож на Форда-Беллмана: или он сойдётся за $n-1$ итерацию, или мы получим цикл с «положительным приращением $d[A]$», и сможем по нему гулять до $+\infty$. Время работы $\mathcal{O}(nm)$ арифметических операций, для выполнения которых, к сожалению, нужна длинка.

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(2) Матрица расстояний с уменьшением ребер**

   На запрос «уменьшился вес ребра» за $\mathcal{O}(n^2)$ пересчитывать матрицу расстояний.

2. **(3) Выжить**

   Вы играете в игру. Игра происходит на *ориентированный* графе, вершины – комнаты. Комнат до 1000, проходов между комнатами до 1000. За ход можно перейти в соседнюю комнату. В каждый момент времени у вас есть целый уровень брони от 0 до 100 и целый уровень HP от 0 до 10^9. На каждом ребре написано, на сколько изменится уровень брони и HP, если вы по нему пройдёте (может в плюс, может в минус). HP не увеличивается выше 10^9. Если HP становится меньше нуля, вы умираете. Броня остаётся в пределах от 0 до 100. На самом деле при проходе по ребру с вами происходит что-то интересное, но для задачи важно лишь, как поменяются статы. В некоторых комнатах вы себя плохо чувствуете и, от этого HP изменяется следующим образом $x \to \lfloor x^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{200}a)} \rfloor$. Т.е. при нулевой броне упадёт до $\sqrt{x}$, при полной броне не поменяется. Нужно дойти от старта до финиша и не умереть.

   Решение без строгого обоснования корректности будет получать не более **(1.5)** баллов.

3. **(2) Почти все неотрицательные веса**

   В орграфе почти все ребра имеют неотрицательные веса.
   Найдите кратчайший путь из s в t за $\mathcal{O}(m \log n)$.

   a) **(1)** Неотрицательны все, кроме ребер, смежных с s, t.
   b) **(1)** Неотрицательны все, кроме ребер, смежных с s, t, x (какая-то третья вершина).
   c) **(+1)** Неотрицательны все, кроме ребер, смежных с s, t, $x_1, \ldots, x_k$. Нужно решение за $\mathcal{O}(km \log n)$.

4. **(2) Потенциалы**

   Пусть про граф известно, что можно сделать веса всех рёбер неотрицательными, выбрав ненулевые потенциалы у не более чем k вершин. Найдите эти не более чем k вершин и их потенциалы.

   a) **(1)** $k = 1$, $\mathcal{O}(n + m)$
   b) **(1)** $k = 2$, $\mathcal{O}(\text{poly}(n, m))$
   c) **(+1)** $k = 2$, $\mathcal{O}(n + m)$

3.2. Дополнительная часть

1. **(2) Крутые потенциалы**

   Дан произвольные взвешенный орграф. Подобрать такие потенциалы, чтобы минимальный вес ребра был максимален. Полный балл получит решение за $\mathcal{O}(VE)$.

2. **(2) Dynamic connectivity in directed graph**

   Дан ацикличный орграф. Нужно за $\mathcal{O}(n^2)$ обрабатывать запросы «добавить ребор» и «удалить ребро». Гарантируется, что граф всегда остается ацикличным. Также нужно за $\mathcal{O}(1)$ отвечать на запрос «есть ли путь из a в b»?

   Подсказка: наш алгоритм будет вероятностным.

3. **(2) Нельзя быстро пересчитать матрицу!**

   Докажите, что если мы за $T(n)$ умеем пересчитывать матрицу расстояний после удаления одного ребра в орграфе с положительными весами, то мы умеем насчитать матрицу расстояний с нуля за $\mathcal{O}((n^2 + T(n)) \cdot \log n)$.
   Формально: есть алгоритм, который на вход получает орграф, матрицу расстояний, ребро, которое нужно удалить, возвращает новую матрицу расстояний после удаления. Тогда есть алгоритм, который работает не более чем в $\log n$ раз дольше, на вход получает граф, на выход дает матрицу расстояний.

4. **(2) Отрицательные циклы, в очередь!**

   Предложите простой алгоритм (без идей Гольдберга) поиска отрицательного цикла в случайных графах размера $V, E \leqslant 10^5$.

5. **(3) Экспоненциальная Дейкстра**

   На практике мы построили граф с отрицательными рёбрами из n вершин, на котором Дейкстра работает за $2^{n/2}$. Теперь нужно придумать тест, на котором Дейкстра работает 2^{nC} для $C \in (0.5, 1]$. $\forall C > 0.5$ вы получите минимум 1 балл, за $C = 1$ вы получите все 3 балла.