

SPb HSE, 1 курс, осень 2024/25

Практика по алгоритмам #6

Сортировки, точки-экстремумы

9 октября

Собрано 9 октября 2024 г. в 11:12

Содержание

1. Сортировки и поиск	1
2. Задачи про поиск точки	1
3. Дополнительные задачи	2
4. Разбор задач практики	3
4.1. Задачи про поиск точки	4
4.2. Дополнительные задачи	6
5. Домашнее задание	8
5.1. Обязательная часть	8
5.2. Дополнительная часть	9

Сортировки и поиск

1. Пирожки

Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков n . Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Пирожки можно менять местами. Память у робота маленькая, $\mathcal{O}(\log n)$ бит.

Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.

2. Оптимизация скалярного произведения

Даны два массива a и b одинаковой длины. Найти такую перестановку p , что

a) $\sum_{i=1}^n a_{p_i} b_i \rightarrow \max$;

b) $\sum_{i=1}^n a_{p_i} b_i \rightarrow \min$.

c) Выбрать массив p из k различных чисел от 1 до n так, чтобы $\sum_{i=1}^k a_{p_i} b_{p_i} \rightarrow \max$.

3. Умный бинпоиск

Пусть мы ищем в отсортированном массиве длины n такое k : $a[k] = x$, тогда бинпоиск работает за $\mathcal{O}(\log n)$, а линейный поиск за $\mathcal{O}(k)$, что может быть меньше. Научите бинпоиск находить k за $\mathcal{O}(\log k)$!

4. Корни многочлена

a) Найти корень многочлена нечетной степени за $\mathcal{O}(n \log M)$. n – степень многочлена.

b) Зная все корни производной, найти все вещественные корни многочлена за $\mathcal{O}(n^2 \log M)$.

c) Найти все вещественные корни многочлена за $\mathcal{O}(n^3 \log M)$.

5. Нижняя оценка на два бинпоиска

Докажите, что нельзя сделать и `lower_bound`, и `upper_bound` одновременно, используя в худшем случае меньше чем $2 \log_2 n + \mathcal{O}(1)$ сравнений.

Задачи про поиск точки

Каждую из предложенных задач можно решить за время $\mathcal{O}(n)$, решения за линию от n на полилогарифм тоже приветствуются. Для разминки продифференцируйте $x^7 + 4x^3$.

1. Точки на прямой

Даны n точек на прямой x_i . Найти точку x^* :

a) $\sum_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$

b) $\sum_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$

c) $\max_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$

d) $\max_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$

2. Точки на плоскости

Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) . Найти точку (x^*, y^*) :

a) $\max_i \left[\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|) \right] \rightarrow \min$

b) Найдите за $\mathcal{O}(n)$ площадь пересечения n прямоугольников со сторонами параллельными осям координат. Поймите, как выглядит на плоскости множество точек $\{\max(|x|, |y|) \leq d\}$. Как оно выглядит после поворота на 45? Опишите новую фигуру формулой.

Решите бинарными поиском по ответу $\max_i \left[|x_i - x^*| + |y_i - y^*| \right] \rightarrow \min$. Решите без бинарного поиска.

c) $\sum_i \left[(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2 \right] \rightarrow \min$

d) $\sum_i \left[|x_i - x^*| + |y_i - y^*| \right] \rightarrow \min$

e) $\sum_i \left[\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|) \right] \rightarrow \min$

3. Точки с весами

На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n . Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Требуется найти точку q : $\sum_i \left[w_i \cdot |p_i - q| \right] \rightarrow \min$.

(*) Решить за $\mathcal{O}(n)$.

Дополнительные задачи

1. Еще ускорение SiftDown

Модифицируйте операцию SiftDown для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $\mathcal{O}(\log n)$, но при этом делала лишь $\log_2 n + \mathcal{O}(\log^* n)$ сравнений.

2. Convex hull

Доказать, что, если мы умеем строить выпуклую оболочку n точек на плоскости за время $f(n)$, мы умеем сортировать n целых чисел за $f(n)$.

3. **Hard K-best max** $\left(\sum_{i=1}^k a_{p_i} \right) \left(\sum_{i=1}^k b_{p_i} \right) \rightarrow \max (a_i, b_i > 0)$.

4. **Hard K-best min** $\left(\sum_{i=1}^k a_{p_i} \right) \left(\sum_{i=1}^k b_{p_i} \right) \rightarrow \min (a_i, b_i > 0)$.

5. Точки на плоскости

f) $\max_i \left[(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2 \right] \rightarrow \min$

g) $\sum_i \sqrt{(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2} \rightarrow \min$

6. Оптимизация $\min \times \sum$

Найти отрезок массива, на котором $\min \times \sum$ максимально. $\mathcal{O}(n)$.

a) Все числа положительные.

b) Числа целые, 64-битные. Решение с использованием минимума на отрезке за $\mathcal{O}(1)$.

c) Числа целые, 64-битные. Простое решение со стеком.

7. Коровы и стойла #2

То же самое, только теперь стойла стоят на окружности. Решение за $\mathcal{O}(n \log \text{MAX})$.

Разбор задач практики

1. Пирожки

Краткое условие: отсортировать массив одним проходом, используя $\mathcal{O}(1)$ доп.памяти.
Сортировка для k типов пирожков за $\mathcal{O}(nk)$ с $k \log_2 n$ бит доп.памяти на примере $k=3$:

Изначально $i_1 = i_2 = i_3 = 0$.

Поддерживаем инвариант: $[0, i_1)$ – единицы, $[i_1, i_2)$ – двойки, $[i_2, i_3)$ – тройки.

Двигаем i_3 , `swap`-ами ставим $a[i_3]$ в нужное место.

```

1 for (int i1 = 0, i2 = 0, i3 = 0; i3 < n; ++i3)
2     if (a[i3] != 3) // a[0,i1)=1 a[i1,i2)=2 a[i2,i3)=3
3         swap(a[i3], a[i2]);
4         if (a[i2] != 2)
5             swap(a[i2], a[i1++]);
6         ++i2;
```

2. Оптимизация скалярного произведения

ab) **Идея:** хотим чтобы максимальный a_i стоял рядом с максимальным b_j .

Сортируем пары $A_i = (a_i, i)$ по возрастанию.

Если хотим `max`, сортируем пары $B_j = (b_j, j)$ по возрастанию, иначе по убыванию.

Соответствие: $A_i \leftrightarrow B_i$. Ответ: $p[A_i.\text{second}] = B_i.\text{second}$.

Доказательство (транс-неравенство): пробуем менять местами два элемента a ,
 $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq a_2 b_1 + a_1 b_2 \Leftrightarrow a_1(b_1 - b_2) + a_2(b_2 - b_1) \leq 0 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \leq 0$

$\Leftrightarrow (a_1 > a_2 \wedge b_1 \leq b_2)$. *Вывод:* если b отсортирован и a не отсортирован, можно поменять местами два элемента a , ответ не ухудшится, число инверсий уменьшится.

c) $\sum_{i=1}^k a_{p_i} b_{p_i} \rightarrow \max$.

Нужна `max` сумма из k элементов массива $c_i = a_i b_i$, берем k максимальных c_i .

Это можно сделать за $\mathcal{O}(n \log n)$ сортировкой,

можно за $\mathcal{O}(n + k \log n)$ построением кучи и извлечением k максимумов,

можно за $\mathcal{O}(n)$ поиском $(n-k)$ -й статистики и выбором всех не меньших ее элементов.

3. Умный бинпоиск

`R = 1; while (a[R] < x) R *= 2;` за $\mathcal{O}(\log k)$ даст нам $R < 2k$.

Затем фигачим бинпоиск на $[0, R]$ за $\mathcal{O}(\log k)$.

4. Корни многочлена

a) Пусть для определенности старший коэффициент многочлена будет положительный.

Тогда $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$.

Инвариант бинпоиска: $f(l) < 0$, $f(r) \geq 0 \Rightarrow$ в $[l, r]$ всегда есть корень.

На каждом шаге бинпоиска вычисляем $f(m)$ за $\Theta(n)$, итого $\mathcal{O}(n \log M)$.

Как найти начальные значения l и r ?

`r = 1; l = -1; while (f(r) < 0) r *= 2; while (f(l) >= 0) l *= 2;`

b) Между соседними корнями производной функция монотонна, т.к. производная не меняет знак \Rightarrow там не больше одного корня и его можно найти бинпоиском. Еще могут быть корни справа от `max` корня производной и слева от `min` корня (+2 отрезка на рассмотрение).

Степень производной многочлена равна $n-1 \Rightarrow$ корней у неё не больше $n-1$.

Время работы: $\mathcal{O}(n)$ отрезков, на каждом бинпоиск за $\mathcal{O}(n \log M)$, итого $\mathcal{O}(n^2 \log M)$.

- с) Если $n = 1$, найдём корень за $\mathcal{O}(1)$ (линейное уравнение), иначе посчитаем производную, рекурсивным вызовом найдём её корни, воспользуемся решением (b).

Как считать производную? $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow P'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$.

Время работы: $T(n) = T(n-1) + n^2 \log M = \mathcal{O}(n^3 \log M)$.

Замечание для самых любопытных.

На практике при наличии кратных корней этот метод не работает из-за погрешности.

Пример: $P(x) = (x-1)^{10} \Rightarrow P(1.01) = 10^{-20}$, что не отличимо от нуля даже в `long double`.

Для борьбы с кратными корнями задачу делят на две – найти кратные корни, как корни $G(x) = \gcd(P(x), P'(x))$, найти оставшиеся, как корни $P(x)/G(x)$.

4.1. Задачи про поиск точки

1. Точки на прямой

- a) $\sum_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$.

Минимум в нуле производной. $\sum 2(x_i - x^*) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sum x_i}{n}$.

- b) $\sum_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$.

Идея: пусть ответ в точке x , подвигаем чуть-чуть x , улучшился ли ответ?

Рассмотрим какой-нибудь x . Пусть слева от него l точек, справа r .

Если сдвинем x на ε вправо, не перескочив ни через одну точку, то $\sum_i |x_i - x|$ изменится на $(l - r)\varepsilon$. Если $l < r$, движение вправо улучшает. Если $l > r$, движение влево улучшает.

Итого: брать нужно медиану. $\mathcal{O}(n)$.

Если n нечётно, медиана = $x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ в отсортированном порядке.

Если n чётно, медиан две, можно взять любую точку между ними.

- с) $\max_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$.

Максимум либо в самой левой, либо в самой правой точке, поэтому $x^* = \frac{x_1 + x_n}{2}$.

- d) $\max_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$.

Задача эквивалентна максимизации $|x_i - x^*| \Rightarrow x^* = \frac{x_1 + x_n}{2}$.

2. Точки на плоскости

- a) $\max_i [\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$.

$\max_i [\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)] = \max [\max_i |x_i - x^*|, \max_i |y_i - y^*|]$
 \Rightarrow координаты x^* и y^* не зависят друг от друга $\Rightarrow x^* = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}, y^* = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2}$.

- b) $\max_i [|x_i - x^*| + |y_i - y^*|] \rightarrow \min$.

Предварительные рассуждения.

Бинпоиск по ответу. Внутри бинпоиска нужно уметь проверять, есть ли точка на расстоянии $\leq t$ от каждой (x_i, y_i) . Для каждой (x_i, y_i) рассмотрим множество точек, находящихся на расстоянии $\leq t$ по метрике $|x - x_i| + |y - y_i|$.

Пересекаем эти множества, проверяем, пусто ли пересечение.

Каждое такое множество – квадрат, повернутый на 45° к осям координат.

Пересечение множеств – прямоугольник, повернутый на 45° .

Из разминки вы умеете пересекать квадраты со сторонами, параллельными осям координат. Повернём плоскость на 45° , найдём ответ, повернём его обратно.

Прямое преобразование: $(z_i, t_i) = (x_i - y_i, y_i + x_i)$.

Обратное преобразование: $(x^*, y^*) = (\frac{z^*+t^*}{2}, \frac{t^*-z^*}{2})$.

Откуда прямая формула: поворот точки (x, y) вокруг $(0, 0)$ на 90° – это $(-y, x)$.

Поворот на 45° – биссектриса между (x, y) и $(-y, x)$, биссектриса получается сложением векторов. Преобразование $(x_i, y_i) \rightarrow (x_i - y_i, y_i + x_i)$ – это не только поворот, но и растяжением плоскости в $\sqrt{2}$ раз. Растяжение не влияет на максимизацию.

Заметим, что после поворота и бинарный поиск не нужен, получившиеся квадраты – это множества, находящиеся на фиксированном расстоянии от точки по метрике $\max(|z|, |t|)$.

Формально: $\max(|x-y|, |x+y|) = |x| + |y|$. То есть, мы свелись к предыдущей задаче:

$$\max_i (|x^* - x_i| + |y^* - y_i|) = \max_i (\max(|z^* - z_i|, |t^* - t_i|))$$

Решение коротко.

Обозначим $z_i = x_i + y_i, t_i = x_i - y_i$.

Обозначим $z^* = x^* + y^*, t^* = x^* - y^*$.

Обозначим $dz_i = z_i - z^*, dt_i = t_i - t^*, dx_i = x_i - x^*, dy_i = y_i - y^*$.

Заметим, что $\max(|dz_i|, |dt_i|) = \max(|dx_i + dy_i|, |dx_i - dy_i|) = |dx_i| + |dy_i|$.

Тогда $\max_i [|dx_i| + |dy_i|] = \max_i [\max(|dz_i|, |dt_i|)]$.

Взяли решение (а) для для точек (z_i, t_i) , получили $z^* = \frac{z_{\min} + z_{\max}}{2}, t^* = \frac{t_{\min} + t_{\max}}{2}$.

Перешли от (z, t) к (x, y) : $x^* = \frac{z^* + t^*}{2}, y^* = \frac{z^* - t^*}{2}$.

Главная идея, запомните: $\max(|dz_i|, |dt_i|) = |dx_i| + |dy_i|$, оно же «поворот на 45° ».

Алгоритм за $\mathcal{O}(n)$.

1. $z_i = x_i + y_i, t_i = x_i - y_i$

2. $z^* = \frac{z_{\min} + z_{\max}}{2}, t^* = \frac{t_{\min} + t_{\max}}{2}$

3. $x^* = \frac{z^* + t^*}{2}, y^* = \frac{z^* - t^*}{2}$

c) $\sum_i [(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2] \rightarrow \min.$

Сумма распадается на независимые суммы по каждой координате. $x^* = \frac{\sum x_i}{n}, y^* = \frac{\sum y_i}{n}$.

d) $\sum_i [|x_i - x^*| + |y_i - y^*|] \rightarrow \min.$

Независимые суммы по каждой координате. $x^* = x_{\text{median}}, y^* = y_{\text{median}}$.

e) $\sum_i [\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)] \rightarrow \min.$

1. Повернуть плоскость на 45° , получить задачу (d).

2. Взять решение задачи (d), повернуть полученный ответ обратно.

3. Точки с весами

Идея: пусть ответ в точке x , подвигаем чуть-чуть x , улучшился ли ответ?

Рассмотрим какой-нибудь x , пусть суммарный вес точек слева от x равен w_l , справа w_r .

Если сдвинем x на ε вправо, не перескочив ни через одну точку, то $\sum w_i |p_i - x|$ изменится на

$(w_l - w_r)\varepsilon$. Если $w_l < w_r$, движение вправо улучшает. Если $w_l > w_r$, движение влево улучшает.
 \Rightarrow нам подойдет самая левая точка такая, что сумма весов слева до неё (включая её саму) достигает половины от суммарного веса. Так называемая взвешенная медиана.

Найти точку можно за $\mathcal{O}(n)$ тем же алгоритмом (одноветочный Quick Sort), который ищет медиану. Внутри Quick Sort теперь нужно смотреть не на число элементов, которые меньше разбивающего, а на их суммарный вес.

4.2. Дополнительные задачи

1. Еще ускорение SiftDown

$\log_2 n + \mathcal{O}(\log^* n)$ сравнений.

Пусть мин куча. Спустимся на $\log n - \log \log n$ вниз, попали в i , сравним $h[i]$ с нашим x .

Если $h[i] > x$, то бинарным поиском за $\log \log n$ побеждаем.

Если $h[i] \leq x$, то мы за $(\log n - \log \log n) + 1$ сравнений свели задачу «спуститься вниз на $\log n$ » к такой же, только спускаться осталось лишь на $\log \log n$, продолжим спуск.

$(\log n - \log \log n + 1) + (\log \log n - \log \log \log n + 1) + \dots = \log n + \mathcal{O}(\log^*)$.

2. Convex hull

Пусть нужно отсортировать числа x_i . Возьмём точки (x_i, x_i^2) .

Алгоритм построения выпуклой оболочки отсортирует все точки.

3. Hard K-best max: $(\sum_{i=1}^k a_{p_i})(\sum_{i=1}^k b_{p_i}) \rightarrow \max$.

Пусть $a_i + b_i = C$ (константа). Тогда какие бы k пар мы не выбрали, будет верно $\sum a_i + \sum b_i = kC$. Произведение максимально, если $\sum a_i = \frac{kC}{2}$. Т.е. если существуют такие k a -шек, мы должны их найти. Это задача о рюкзаке.

4. Hard K-best min: $(\sum_{i=1}^k a_{p_i})(\sum_{i=1}^k b_{p_i}) \rightarrow \min$

?

5. Точки на плоскости

f) $\max_i [(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2] \rightarrow \min$.

Два вложенных тернарных поиска, по y и по x . $\mathcal{O}(n \log^2 M)$.

Существует простой вероятностный алгоритм за $\mathcal{O}(n)$ в среднем.

А есть даже детерминированный за $\mathcal{O}(n)$.

g) $\sum_i \sqrt{(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2} \rightarrow \min$.

Два вложенных тернарных поиска, по y и по x . $\mathcal{O}(n \log^2 M)$.

6. Оптимизация $\min \times \sum$

Для каждого i ищем отрезок $[L_i, R_i]$ с максимальной суммой, в котором $a_i = \min$.

Поиск L_i и R_i – независимые задачи, решаются одинаково. Разберем поиск L_i .

Найдем за $\mathcal{O}(n)$ для каждого элемента ближайший слева меньший его l_i .

a) Если все числа положительны, то $L_i = l_i + 1$.

b) $L_i = \max_{j \in (l_i, i]} (a_i \cdot (\text{pref}_{i+1} - \text{pref}_j))$. То есть, если $a_i > 0$, $\min \text{pref}_j$, иначе $\max \text{pref}_j$.

c) \exists структура данных, дающая \min/\max на полуинтервале $(l_i, i]$ за $\mathcal{O}(1)$.

Можно проще: давайте по ходу вычисления l_i помнить \min/\max между соседними элементами в стеке. Тогда значение для $(l_i, i]$ будет на стеке, когда мы положим i .

7. Коровы и стойла #2

Тот же бинпоиск, что и для обычных коров. Внутри бинпоиска нужно за $\mathcal{O}(n)$ проверить, что можно выбрать k точек на окружности на расстоянии $\geq m$.

1. Отсортируем точки на окружности.

Удвоим массив: $x[i+n] = x[i] + L$, где L – длина окружности.

2. За $\mathcal{O}(n)$ двумя указателями $\forall i$ найдем $next[i] = \min j : x[j] \geq x[i] + m$.

3. Теперь для любой точки можно за $k-1$ прыжок $i \rightarrow next[i]$ проверить, можно ли взять её в ответ. Проверим точку $x[0]$.

4. а) Не зациклились за $k-1$ прыжок \Rightarrow ок, расставили.

б) Зациклились за $< k-1$ прыжков \Rightarrow ни с какой начать нельзя.

в) Зациклились ровно за $k-1$ прыжок \Rightarrow окружность разбилась на $k-1$ часть, в одной из них $\leq \frac{2n}{k-1}$ точек. Проверим каждую из них за $\mathcal{O}(k)$.

Итого время работы $\mathcal{O}(n \log M)$.

Домашнее задание

5.1. Обязательная часть

1. (3) Ближайшие к медиане

Дан массив $A[1..n]$ из n различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти k ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.

а) (1) По позиции в отсортированном массиве.

$$d(x, \text{median}) = |\text{pos}(x) - \text{pos}(\text{median})|,$$

где $\text{pos}(x)$ — позиция элемента x в отсортированном массиве.

б) (2) По значению.

$$d(x, \text{median}) = |x - \text{median}|.$$

2. (4) Поиск точки

а) (1) Даны n точек на прямой x_i с весами $w_i \geq 0$. Найти точку x^* :

$$\sum_i [w_i(x_i - x^*)^2] \rightarrow \min$$

б) (1) Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) с весами $w_i \geq 0$. Найти точку (x^*, y^*) :

$$\sum_i [w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$$

в) (2) Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) с весами $w_i \geq 0$. Найти точку (x^*, y^*) :

$$\max_i [w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)] \rightarrow \min.$$

Дополнительный (+1) балл можно заработать, решив эту задачу $\mathcal{O}(\text{sort} + n)$.

3. (3) Поиск двух точек

На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n . Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$.

Выбрать две точки q_1, q_2 : $\sum_i [w_i \cdot \min(|p_i - q_1|, |p_i - q_2|)] \rightarrow \min$.

Решение за $\mathcal{O}(n^2)$ даст один балл из трёх.

Hint: перебирать можно не только координаты q_i .

4. (3) Поиск многих статистик

Дан массив из n чисел и m чисел k_1, k_2, \dots, k_m ,

нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого i найти k_i -ую порядковую статистику.

5. (2) Поиск статистики

Оцените сложность детерминированного алгоритма поиска k статистики, если в нем разбивать на группы не по 5 элементов, а по:

а) (1) 7

б) (1) 3

5.2. Дополнительная часть

1. (2) Сортировка вещественных чисел

Даны n вещественных чисел из $[0, 1]$ в произвольном порядке. Представим, что они уже отсортированы и посмотрим на разности соседних чисел. Нужно найти максимальную такую разность за $\mathcal{O}(n)$.

2. (3) Поиск центра

Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) с весами $w_i \geq 0$. Найти точку (x^*, y^*) :

$$\max_i \left[w_i \left((x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2 \right) \right] \rightarrow \min.$$

Будут оценены решения за линию на полилогарифм.

3. (3) Поиск трех точек

На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n . Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$.

$$\text{Выбрать три точки } q_1, q_2, q_3: \sum_i \left[w_i \cdot \min(|p_i - q_1|, |p_i - q_2|, |p_i - q_3|) \right] \rightarrow \min.$$

Требуется решение за линию на полилогарифм.

4. (2) Амортизированная вставка в кучу

Придумайте, как модифицировать обычную бинарную кучу так, чтобы `Add` работал за амортизированное $\mathcal{O}(\log \log n)$.

5. (5) Нижняя оценка на построение кучи

Внимание: эту задачу можно сдавать **только до лекции**.

Какое минимальное число сравнений нужно, чтобы построить обычную бинарную кучу? Докажите максимально точную нижнюю оценку. Для простоты вычислений предположим, что в массиве $n = 2^k - 1$ элементов.

- (1) Хотя бы $n - 1$ сравнений.
- (1.5) Хотя бы n сравнений для $n \geq 10$.
- (3) Оценка $1.3644 \cdot n + \mathcal{O}(1)$ без строгого доказательства.
- (5) Оценка $1.4999 \cdot n + \mathcal{O}(1)$ без строгого доказательства.