

SPb HSE, 1 курс, осень 2024/25

Практика по алгоритмам #1

Асимптотика и рекуррентные соотношения

4 сентября

Собрано 6 сентября 2024 г. в 19:02

Содержание

1. Асимптотика и рекуррентные соотношения	1
2. Разбор задач практики	3
3. Домашнее задание	7
3.1. Обязательная часть	7
3.2. Дополнительная часть	8

Асимптотика и рекуррентные соотношения

1. Простые задачи на асимптотику

Найдите короткую запись через Θ .

Если такой не существует, объяснить, почему, и записать через \mathcal{O} .

- | | |
|-------------------------|---|
| a) $2n$ | f) $\frac{\arctg n}{n} + \frac{\log \log n}{\log n}$ |
| b) $2n + 1$ | g) $\sqrt{\frac{n}{\log n} + \frac{7 \log n}{n}} + n^{1/3}$ |
| c) $n^2 + 5n + 1$ | h) Докажите: $\forall f, g > 0: f + g = \Theta(\max(f, g))$ |
| d) $\frac{n^2+3}{7n+1}$ | i) $\frac{P(n)}{Q(n)}$ |
| e) $n(2 + \sin n)$ | |

2. Пользуемся определением

Пусть $g = \mathcal{O}(f)$, $h = \Theta(f)$, $t = o(f)$, докажите $g + h + t = \Theta(f)$.

Пример: $g(n) = \frac{n}{2}$, $h(n) = 2n$, $t(n) = \sqrt{n}$, $f(n) = n$.

3. Истина или ложь?

Проверьте корректность, докажите.

- | | |
|--|--|
| a) $2^{n+3} = \Theta(2^n)$ | g) $f(n) + g(n) = \Theta\left(\frac{f(n)+g(n)}{2}\right)$ |
| b) $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$ | h) (*) $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$ |
| c) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = \mathcal{O}(2^{f(n)})$ | i) $\frac{n}{\log n} = \omega(\log n)$ (А если Ω ?) |
| d) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = o(2^{f(n)})$ | j) $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n)$ |
| e) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = \mathcal{O}(\log f(n))$ | k) $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = \mathcal{O}((\log n)^n)$ |
| f) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = o(\log f(n))$ | |

4. Рекуррентность

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$
- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n$
- $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- Докажите (d) не пользуясь мастер-теоремой.
- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$
- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

5. Порядок функций

Упорядочьте функции n , $n^{0.5}$, n^3 , $\log n$, $\log^{100} n$, 2^n , 0.01^n , 100^n в порядке возрастания с точки зрения асимптотики. (*) Доказать результат.

6. Дополнительные задачи

Найдите короткую запись через Θ .

Если \nexists , то объяснить почему, и записать через \mathcal{O} .

a) $f(n) = n(1 + \sin n)$

b) То же для $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$

c) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$

d) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$

e) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + 1$

f) $T(n) = T(\frac{n}{\log n}) + \log n$

g) $T(n) = T(n-1) + T(\sqrt{n})$

h) $T(n) = T(n-1) + T(n-1) + 1$

i) $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 1$

Разбор задач практики

1. Простые задачи на асимптотику

a) $2n = \Theta(n)$, по определению :)

b) $n \leq 2n + 1 \leq 2n + n = 3n \Rightarrow 2n + 1 = \Theta(n)$.

c) $n^2 \leq n^2 + 5n + 1 \leq n^2 + 5n^2 + n^2 = 7n^2 \Rightarrow n^2 + 5n + 1 = \Theta(n^2)$.

d) $\frac{n^2}{7n+n} \leq \frac{n^2+3}{7n+1} \leq \frac{n^2+n^2}{7n} \Rightarrow \frac{1}{8}n \leq \frac{n^2+3}{7n+1} \leq \frac{2}{7}n \Rightarrow \frac{n^2+3}{7n+1} = \Theta(n)$.

Способ #2: $\frac{n^2}{7n+1} = \frac{1}{7}n - \frac{1}{49} + \frac{1/49}{7n+1} = \Theta(n) + o(1) = \Theta(n)$.

e) $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow n \leq n(2 + \sin n) \leq 3n \Rightarrow n(2 + \sin n) = \Theta(n)$.

f) $\arctg n < \frac{\pi}{2} < \log \log n$, $n > \log n \Rightarrow \frac{\arctg n}{n} + \frac{\log \log n}{\log n} \leq 2 \frac{\log \log n}{\log n} \Rightarrow \frac{\arctg n}{n} + \frac{\log \log n}{\log n} = \Theta\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)$.

g) $\sqrt{\frac{n}{\log n} + \frac{7 \log n}{n}} + n^{1/3} = \Theta\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$.

h) $\max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq 2 \max(f(n), g(n))$.

i) $\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\Theta(n^{\deg P})}{\Theta(n^{\deg Q})} = \Theta(n^{\deg P - \deg Q})$.

Стоит формально доказать, что $\frac{\Theta(f)}{\Theta(g)} = \Theta\left(\frac{f}{g}\right)$.

Пусть $C_1 f \leq \Theta(f) \leq C_2 f$, $C'_1 g \leq \Theta(g) \leq C'_2 g$, тогда $\frac{C_1 f}{C'_2 g} \leq \frac{\Theta(f)}{\Theta(g)} \leq \frac{C_2 f}{C'_1 g}$.

2. Пользуемся определением

$g = \mathcal{O}(f) \Rightarrow \exists C > 0: g \leq C \cdot f$

$h = \Theta(f) \Rightarrow \exists C_1, C_2 > 0: C_1 \cdot f \leq h \leq C_2 \cdot f$

$t = o(f) \Rightarrow \forall C > 0: t \leq C \cdot f$, возьмём $C = 1 \Rightarrow$

$(0 + C_1 + 0) \cdot f \leq g + h + t \leq (C + C_2 + 1) \cdot f$

3. Истина или ложь?

a) $2^{n+3} = \Theta(2^n)$.

Верно: $2^{n+3} = 8 \cdot 2^n = \Theta(2^n)$.

b) $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$.

Неверно: $2^{2n+1} \leq c \cdot 2^n \Rightarrow 2^{n+1} \leq c \Rightarrow n \leq \log c - 1$, ложь для достаточно больших n .

c) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = \mathcal{O}(2^{f(n)})$.

Неверно, возьмём $g(n) = 2n + 1$, $f(n) = n$, получим предыдущий пункт.

d) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = o(2^{f(n)})$. Верно при $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

При достаточно больших n $g(n) < 0.9f(n) = f(n) - 0.1f(n) \Rightarrow 2^{g(n)} < 2^{f(n)} \cdot 2^{-0.1f(n)}$.

Для любой $C \geq 2^{-0.1f(n)}$ верно $2^{g(n)} < C \cdot 2^{f(n)}$. Раз $f(n) \rightarrow \infty$, получили $\forall C$.

Способ #2 (через пределы): $g(n) = o(f(n)) \Leftrightarrow \frac{g(n)}{f(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

$\frac{2^{g(n)}}{2^{f(n)}} = 2^{g(n)-f(n)}$, а $g(n) - f(n) = f(n) \left(\frac{g(n)}{f(n)} - 1\right) \leq -0.9f(n)$ при больших n .

$$2^{g(n)-f(n)} \leq \frac{1}{2^{0.9f(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

e) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = \mathcal{O}(\log f(n)).$

Верно при $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ (а также для $f(n): \liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) > 0$).

$$\exists c g(n) < cf(n) \Rightarrow \log g(n) < \log c + \log f(n) \Rightarrow \log g(n) < 1.1 \cdot \log f(n).$$

f) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = o(\log f(n)).$

Неверно, возьмем $g(n) = n, f(n) = n^2$.

g) $f(n) + g(n) = \Theta\left(\frac{f(n)+g(n)}{2}\right)$, верно по определению.

h) $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$.

Верно, доказано на лекции.

i) $\frac{n}{\log n} = \omega(\log n) \Leftrightarrow \log n = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$.

Верно: $\forall c \log n < c \frac{n}{\log n} \Leftrightarrow \log^2 n < cn \Leftrightarrow \log^2 n = o(n)$, верно из лекции.

Если уж ω , то Ω тем более.

j) $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n)$.

Неверно: $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n) \Rightarrow \frac{n}{\log n} > cn \Rightarrow \log n < \frac{1}{c}$, ложь для достаточно больших n .

k) $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = \mathcal{O}((\log n)^n)$.

Сравним логарифмы.

$$\log(\sqrt{n}^{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2}\sqrt{n} \log n.$$

$$\log((\log n)^n) = n \log \log n.$$

$\log n = o(\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{n} \log n = o(n) = o(n \log \log n)$, по пункту (d) $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = o((\log n)^n) = \mathcal{O}((\log n)^n)$.

4. Рекуррентность

a) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = 1 + 2(1 + 2T\left(\frac{n}{4}\right)) = 1 + 2 + 4(1 + 2T\left(\frac{n}{8}\right)) = \dots = 1 + 2 + \dots + 2^{\lceil \log n \rceil} = 2^{\lceil \log n \rceil + 1} - 1 = \Theta(n)$.

Способ #2 (по теореме): $a = 2, b = 2, c = 0 < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$.

b) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n = n + 3\left(\frac{n}{3} + 3T\left(\frac{n}{9}\right)\right) = n + \frac{3}{3}n + \frac{9}{9}n + \dots = \sum_{i=0}^{\log_3 n} n = \Theta(n \log n)$.

Способ #2 (по теореме): $a = 3, b = 3, c = 1 = \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log n) = \Theta(n \log n)$.

c) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = n^2 + (n/2)^2 + (n/4)^2 + \dots = \Theta(n^2)$.

d) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \Rightarrow a = 4, b = 2, c = 2 \Rightarrow a = b^c \Rightarrow \Theta(n^c \log n) = \Theta(n^2 \log n)$.

e) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = n^2 + 4(n/2)^2 + 16(n/4)^2 + \dots = \Theta(n^2 \log n)$.

f) $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n = n + 5\left(\frac{n}{2} + 5T\left(\frac{n}{4}\right)\right) = n + \frac{5}{2}n + \frac{25}{4}n + \dots + \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_2 n} n = n \frac{2.5^{\log_2 n + 1} - 1}{2.5 - 1} = \Theta(2.5^{\log_2 n}) = \Theta(n^{\log_2(2.5)}) = \Theta(n^{\log_2 5})$.

Способ #2 (по теореме): $a = 5, b = 2, c = 1 < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 5})$.

g) $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$. Чуть применим мозг, для всех $f(n)$ от n до n^2 ответ будет $n^{\log_2 5} \Rightarrow$ и для $n \log n$ тоже.

$$h) T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = n^2 + 3\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 3T\left(\frac{n}{4}\right)\right) = n^2 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{9}{16}n^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} n^2 \leq n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = n^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4n^2 \Rightarrow n^2 \leq T(n) \leq 4n^2 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2).$$

Способ #2 (по теореме): $a = 3, b = 2, c = 2 > \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c) = \Theta(n^2)$.

5. Порядок функций

В конспекте доказана теорема: $\forall a, b, c > 0 \quad \log^a n = \mathcal{O}(n^b), n^b = \mathcal{O}((1+c)^n) \Rightarrow 0.01^n < \log n < \log^{100} n < n^{0.5} < n < n^3 < 2^n < 100^n$.

6. Дополнительные задачи

a) $f(n) = n(1 + \sin n)$.

$f(n) < 2n = \mathcal{O}(n)$, но $f(n) \neq \Theta(n)$. Говоря грубо, $(1 + \sin n)$ бесконечно часто будет опускаться почти до нуля.

Формально нужно $\forall C, N \quad \exists n > N: n(1 + \sin n) < Cn$. Покажем более сильное утверждение $\forall N, \varepsilon > 0, y \in [-1..1] \quad \exists n > N: |y - \sin n| < \varepsilon$.

Пусть $x = \arcsin y$, хотим найти n с синусом, близким к $\sin x$. Для этого достаточно, чтобы $(n \bmod 2\pi)$ было близко к x : $|\sin n - \sin x| \leq |(n \bmod 2\pi) - x|$.

π иррационально $\Rightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j: (i \bmod 2\pi) \neq (j \bmod 2\pi)$. Рассмотрим первые m натуральных чисел, у них разные остатки по модулю 2π , то есть, им соответствуют разные точки на единичной окружности.

Есть точки i, j на расстоянии $\leq \frac{2\pi}{m}$. Взяв $m = \lceil \frac{2\pi}{\varepsilon} \rceil$, получим, что сделав $t = |j - i|$ шагов, мы смещаемся по окружности на $\leq \varepsilon$. Тогда, ходя с шагом t , можно попасть в ε -окрестность любой точки на окружности.

Чтобы попасть в окрестность x после N , берем $k = \lfloor \frac{x - \sin N}{t} \rfloor$ и $n = N + kt$.

b) $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$. Никак особо не упростить.

Надо только понимать, что $\forall C > 0 \quad \log^C n = o(2^{\sqrt{\log n}})$ и $2^{\sqrt{\log n}} = o(n^C)$.

c) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$.

$$T(n) = 1 + T\left(\frac{n}{2}\right) = 1 + 1 + T\left(\frac{n}{4}\right) = \dots = \log n.$$

Способ #2 (по теореме): $a = 1, b = 2, c = 0 = \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log n) = \Theta(\log n)$.

d) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$.

$$T(n) = n + T\left(\frac{n}{2}\right) = n + \frac{n}{2} + T\left(\frac{n}{4}\right) = \dots = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 \approx 2n = \Theta(n).$$

Способ #2 (по теореме): $a = 1, b = 2, c = 1 > \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c) = \Theta(n)$.

e) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$.

Сначала откинем единичку. Без единички $T(n)$ будет пропорционально числу листьев дерева рекурсии, а с ней – числу всех вершин. Поскольку дерево двоичное, это даст отличие только в два раза.

Видно, что $\Omega(n^{\log_3 2}) < T(n) < \mathcal{O}(n)$. Предположим, что $T(n) = n^\alpha$, тогда:

$$n^\alpha = \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{n}{3}\right)^\alpha \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha.$$

При $\alpha = 0$ правая часть равна $2 > 1$, при очень больших α правая часть почти $0 < 1$, так что график правой части где-то пересечет единицу, у уравнения есть решение. Обычно

такие уравнения решают не аналитически, а приближённо, например, бинарным поиском.

Способ #2. Пусть $T(n) = S(\log n)$, тогда $S(n) = S(n-1) + S(n - \log 3) + 1$, пользуемся теоремой «об экспоненциальных рекуррентных соотношениях».

f) $T(n) = T\left(\frac{n}{\log n}\right) + \log n.$

Грубая прикидка: на каждом уровне $\approx \log n$, уровней $\approx \log_{\log n} n = \frac{\log n}{\log \log n}$, итого $\Theta\left(\frac{\log^2 n}{\log \log n}\right).$

Докажем $T(n) = \Omega\left(\frac{\log^2 n}{\log \log n}\right)$. Пока n не дойдет до \sqrt{n} , $\log n$ будет неизменным с точностью до константы, а уровней рекурсии надо потратить не менее $\log_{\log n} \sqrt{n} = \Omega\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right).$

Теперь докажем $\mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{\log \log n}\right)$. Для этого заметим, что $\forall n$ при переходе от n до \sqrt{n} у нас будет не более $\log_{\log \sqrt{n}}(n/\sqrt{n})$ слагаемых, каждое из которых не более $\log n$.

Сумма всех этих слагаемых не больше $X(n) = C \frac{\log^2 n}{\log \log n}.$

Осталось сложить переходы $n \rightarrow n^{1/2} \rightarrow n^{1/4} \rightarrow \dots$

$$X(n) + X(n^{1/2}) + X(n^{1/4}) + \dots \leq X(n) + \frac{1}{2}X(n) + \frac{1}{4}X(n) = \Theta(X(n)) = \mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{\log \log n}\right).$$

g) $T(n) = T(n-1) + T(\sqrt{n}).$

Будем искать $T(n)$ в виде n^a , тогда получаем, что $(n^a)' \approx n^{\frac{a}{2}} \Rightarrow a-1 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2$. Докажем по индукции оценку сверху n^2 : $T(n-1) + T(\sqrt{n}) \leq (n-1)^2 + n < n^2$.

Далее можно уточнить асимптотику и получить $\frac{n^2}{\log n}.$

$\Omega\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ показывается прямой подстановкой.

$\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ показать сложно, зато можно показать $\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{\log^{1-\varepsilon} n}\right)$ для сколь угодно малого ε .

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(2) Истина или ложь?, (0.5)** за каждый пункт

Проверьте корректность, докажите.

- l) $n^{\log n} = \mathcal{O}(1.1^n)$
- m) $\frac{n^3}{n^2+n \log n} = \mathcal{O}(n \log n)$
- n) $\forall f: f(n) = \mathcal{O}(f(\frac{n}{2}))$
- o) $\log n! = \Theta(n \log n)$

p.s. использовать формулу стирлинга в этой домашке нельзя.

2. **(2) Рекуррентность, (0.5)** за каждый пункт

Во всех задачах предполагается, что $\forall x \leq 1, T(x) = 1$

- g) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n$
- h) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \log^2 n$
- i) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + 1$
- j) $T(n) = T(n-1) + n$

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
n	n ²	+	+	-	-	-
log ^k n	n ^ε					
n ^k	c ⁿ					
√n	n ^{sin n}					
2 ⁿ	2 ^{n/2}					
n ^{log m}	m ^{log n}					
log(n!)	log(n ⁿ)					

3. **(3) Заполнить табличку**

$A = \mathcal{O}(B)$? $A = o(B)$? и т.д.

За каждый неправильный ответ

(-0.2) балла (15 ошибок → 0).

4. **(6) Упорядочить 30 функций в порядке возрастания**

Если какие-то функции равны ($f = \Theta(g)$), указать это. Здесь $\log n$ — двоичный логарифм, $\ln n$ — натуральный логарифм. За каждый неверный ответ **(-0.4)** балла (15 ошибок → 0).

$\log(\log^* n)$	$2^{\log^* n}$	$(\sqrt{n})^{\log n}$	n^2	$n!$	$(\log n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\log^2 n$	$\log n!$	2^{2^n}	$n^{1/\log n}$
$\ln \ln n$	$\log^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\log \log n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\log n)^{\log n}$	e^n	$4^{\log n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\log n}$
$\log^* \log n$	$2^{\sqrt{2 \log n}}$	n	2^n	$n \log n$	$2^{2^{n+1}}$

Примечание: $\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \leq 1; \\ 1 + \log^*(\log n) & \text{иначе} \end{cases}$

5. **(1) Посчитать точно, (0.5)** за каждый пункт

- (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

3.2. Дополнительная часть

1. **(1) Истина или ложь?, (0.5)** за каждый пункт

Проверьте корректность, докажите.

q) $n^n = \mathcal{O}(n!)$

r) $n \log n - \log n! = \Theta(n)$

2. **(1.5) Рекуррентность, (0.5)** за каждый пункт

Во всех задачах предполагается, что $\forall x \leq 1, T(x) = 1$.

l) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

m) $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

n) $T(n) = T(n-1) + T(n-3)$

o) $T(n) = T(\frac{n}{2}) \cdot T(\frac{n}{3})$, при этом $\forall x \leq 3 T(x) = 2$

3. **(1) Рекуррентность и практика**

Дайте наиболее точный ответ, докажите наиболее точные верхние и нижние оценки для

$$T(n) = T(n-1) + T(n^{1/3})$$