

# Вопросы к экзамену по алгоритмам SPb HSE, 1-й курс ПМИ, март 2025

## Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) темы на 3 (оценка 4-5).
- (b) темы на 4 (оценка 6-7).
- (c) темы на 5 (оценка 8-9).
- (+) факультативные темы (оценка 10) – нужно заботать 6 **любых** тем из 8.

## DFS

- (b) 1. DFS. Эйлеров цикл. Эйлеров путь. Случай ориентированного и неориентированного графа. Поиск за  $\mathcal{O}(V + E)$ . Ленивое удаление рёбер.
- (b) 2. DFS. Раскраска вершин графа в  $k$  цветов. Сложность задачи для разных  $k$ . Жадное решение за  $\mathcal{O}(V + E)$ .
- (a) 3. DFS. Мосты и точки сочленения. Тривиальный алгоритм за  $\mathcal{O}(VE)$ .
- (b) 4. DFS. Мосты и точки сочленения. Алгоритм за  $\mathcal{O}(V + E)$  без доказательства корректности.
- (b) 5. DFS. Двусвязность: вершинная и рёберная. Два определения: через удаление объектов, через отношение эквивалентности.
- (c) 6. DFS. Мосты и точки сочленения, сильная связность. Доказательство корректности линейных алгоритмов.
- (c) 7. DFS. Двусвязность: вершинная и рёберная. Алгоритм со стеком поиска компонент за  $\mathcal{O}(V + E)$ .
- (a) 8. DFS. 2-SAT. Определение задачи. Решение за  $\mathcal{O}(VE)$  методом «попробуем подставить».
- (b) 9. DFS. 2-SAT. Решение за  $\mathcal{O}(V + E)$  без доказательства. Примеры задач: 2-LIST-COLORING, расположение геометрических объектов без наложений.
- (c) 10. DFS. 2-SAT. Доказательство корректности решения за  $\mathcal{O}(V + E)$ .

## Теория сложности, рандомизированные алгоритмы

- (a) 11. NP. Формулировки задач Halting Problem,  $k$ -CLIQUE, HAM-PATH, PRIME, IS-SORTED. В каких классах лежат?
- (a) 12. NP. Понятие языка, decision-задачи, search-задачи. Определения P, NP, EXP. Решение search-версии через decision-версию. Формулировки задач:  $k$ -CLIQUE, MAX-CLIQUE.
- (b) 13. NP. Неконструктивное доказательство существования неразрешимых задач.
- (b) 14. NP. Неразрешимость Halting Problem.
- (b) 15. NP. Определение DTime, P, EXP. Теорема об иерархии по времени (без доказательства). Доказательство  $P \neq EXP$ .
- (+) 16. NP. Доказательство теоремы об иерархии по времени.
- (a) 17. NP. Классы NP, NP-hard, NP-complete.  
Задача: пусть  $k$ -IND  $\in$  NPh, докажите, что  $k$ -CLIQUE  $\in$  NPc.
- (b) 18. NP. Полиномиальное сведение (по Карпу). Свойства полиномиального сведения.
- (b) 19. NP. Доказательство существования NP-полных задач.  $VH \in$  NPc.
- (b) 20. NP. Сведения  $VH \rightarrow$  CIRCUIT-SAT  $\rightarrow$  SAT  $\rightarrow$  3-SAT. Что следует из этих сведений?
- (b) 21. NP. Сведения 3-SAT  $\rightarrow$   $k$ -IND  $\rightarrow$   $k$ -CLIQUE  $\rightarrow$  VERTEX-COVER. Что следует из этих сведений?

- (a) 22. NP. Примеры задач из NP, про которые считается, что они не в  $P \cup NP_c \cup coNP_c$  (между P и  $NP_c$ ).
- (b) 23. NP. Решение search-задач минимизации/максимизации через decision-версию. Решение search-версий SAT и k-INDEPENDENT-SET через decision-версии. Использование SAT-солверов.
- (b) 24. NP, Гипотезы ETH, SETH. Формулировки. Следствия между 3 гипотезами.
- (c) 25. NP, coNP, coNEXP.
- (a) 26. RP. Классы RP, coRP, связь с классами P, NP.
- (b) 27. RP. Понижение ошибки в RP, coRP.
- (a) 28. RP. Задачи: самый частый элемент, 3-LIST-COLORING, matrix multiplication testing.
- (b) 29. RP. Тест Ферма, тест Миллера-Рабина, 3 точки для  $2^{32}$ .  
Все оценки вероятностей лишь постулируются, не доказываются.
- (b) 30. RP. Парадокс дней рождений, анализ вероятности в обе стороны.
- (a) 31. RP. Алгоритм Полларда за  $\mathcal{O}(n^{1/4} \log n)$  арифметических операций. Без обоснований.
- (b) 32. RP. Алгоритм Полларда за  $\mathcal{O}(n^{1/4})$  арифметических операций. Обоснование.
- (b) 33. RP. Решение 3-SAT. Детерминированный и рандомизированный алгоритмы за  $1.73^n$  (с доказательствами).
- (c) 34. RP. Решение 3-SAT. Рандомизированные алгоритмы за  $1.5^n$  и  $1.34^n$  (с доказательствами).
- (c) 35. RP. Решение 3-SAT. *Приближённые алгоритмы для MAX-3-SAT в общем случае, и в случае, когда в каждом клозе ровно 3 литерала.*
- (a) 36. RP. Лемма Шварца-Зипшеля без доказательства.
- (c) 37. RP. Лемма Шварца-Зипшеля: доказательство.
- (a) 38. RP. Класс BPP. Понижение ошибки без доказательства.
- (b) 39. RP. Класс ZPP. Теорема  $ZPP = RP \cap coRP$ .
- (b) 40. RP. Класс RP. Связь между классами P, NP, RP, coRP, ZPP, BPP, RP. 4 открытых вопроса.
- (a) 41. RP. *Идеальное шифрование. Вычисление средней зарплаты без разглашения.*
- (b) 42. RP. *Random shuffle массива. Игра на 0-1-дереве, min-max-игра на дереве, шахматы.*

## Графы

- (a) 43. Path. Поиск в ширину. Решение очередь. Дерево кратчайших путей. Восстановление пути.
- (b) 44. Path. 0-1-k bfs (и его частей 1-k, 0-1).
- (c) 45. Path. *Вещественные 1-2 и 0-1 bfs-ы. Поиск в ширину за  $\mathcal{O}(\frac{V^2}{w})$ . 1-k bfs за  $\mathcal{O}(E \log k)$ .*
- (a) 46. Path. Дейкстра. Алгоритм. Доказательство. Решение за  $\mathcal{O}(E \log V)$ ,  $\mathcal{O}(V^2 + E)$ ,  $\mathcal{O}(E + V \log V)$ .
- (b) 47. Path. Алгоритм  $A^*$ . Доказательство для графов с неравенством треугольника. Сравнение с Дейкстрой. Когда  $A^*$  лучше?
- (a) 48. Path. Флойд. Решение за  $\mathcal{O}(V^3)$ . Восстановление пути. Корректность.
- (b) 49. Path. Флойд. Поиск отрицательных циклов. *Транзитивное замыкание за  $\mathcal{O}(\frac{V^3}{w})$ .*
- (a) 50. Path. Форд-Беллман за  $\mathcal{O}(VE)$  и  $V^2$  памяти. Восстановление пути.
- (b) 51. Path. Форд-Беллман. Переход к линейной памяти. Версия с break и версия с очередь (без доказательства времени работы).
- (c) 52. Path. Форд-Беллман. random-shuffle. Оценки и доказательства времени работы в разных случаях: с break, с разными random shuffle, с очередью.
- (c) 53. Path. Форд-Беллман и отрицательные циклы. Поиск, доказательство корректности.
- (b) 54. Path. Идея потенциалов. Применение для APSP: алгоритм Джонсона.
- (b) 55. Path. Поиск цикла минимального среднего веса. За  $\mathcal{O}(VE \log C)$ .
- (c) 56. Path. Поиск цикла минимального среднего веса. За  $\mathcal{O}(VE)$ . Алгоритм Карпа.
- (a) 57. MST. Алгоритм Краскала без доказательства. Время работы.

- (a) 58. MST. Алгоритм Прима без доказательства. Время работы.
- (b) 59. MST. Доказательства Краскала и Прима.
- (c) 60. MST. Алгоритм Борувки. Оценка времени работы  $\mathcal{O}(E \log(V^2/E))$ . Доказательство корректности.
- (a) 61. DSU. Постановка задачи и реализация на списках. Время работы без доказательства.
- (b) 62. DSU. На списках доказательство времени работы  $\mathcal{O}(m + n \log n)$ .
- (b) 63. DSU. Реализация деревьями. Две эвристики.
- (b) 64. DSU. Реализация деревьями. Доказательство оценки  $\mathcal{O}(\log n)$  для сжатия путей.
- (b) 65. DSU. Реализация деревьями. Доказательство оценки  $\mathcal{O}(\log n)$  для ранговой.
- (c) 66. DSU. Доказательство  $\mathcal{O}((m + n) \log^* n)$  для двух эвристик одновременно.
- (c) 67. DSU. Доказательство  $\mathcal{O}(m + n \log^* n)$  для двух эвристик одновременно.

### Жадности и приближенные алгоритмы

- (a) 68. TSP. 2-ОПТ решение.
- (b) 69. TSP. 1.5-ОПТ решение.  $\nexists$  алгоритма если нет неравенства треугольника.
- (b) 70. Правило Варнсдорфа для частного случая. Применение к общему случаю.
- (a) 71. Алгоритм Хаффмана, доказательство, реализация кучей за  $\mathcal{O}(k \log k)$ .
- (b) 72. Поиск кодов по массиву частот за  $\mathcal{O}(\text{sort}(k) + k)$ . Хранение кодов за  $\mathcal{O}(k(2 + \log k))$ .
- (a) 73. Жадность. Задачи на сортировку. Способы доказательства – через swap соседних и через выбор первого/последнего элемента с примерами.
- (a) 74. Жадность. Задачи на сортировку. Примеры: непрерывный рюкзак, файлы на ленте, выполнить побольше задач с общим дедлайном, *башня из спортсменов*.
- (b) 75. Жадность. Задания с дедлайнами: выполнить все за  $\mathcal{O}(n \log n)$ , выполнить максимум за  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- (c) 76. Жадность. Задания с дедлайнами: выполнить максимум. Решение  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Доказательство корректности.
- (b) 77. Жадность. Задача про два (упорядоченных) станка. Формулировка. Корректное решение без доказательства.
- (a) 78. Рюкзаки. Формулировки: partition, balanced partition, knapsack, bin packing.
- (a) 79. Рюкзаки. В предположении NP-трудности partition показываем трудность balanced partition, knapsack, bin packing.
- (a) 80. Partition. Жадное решение (без оценки).
- (+) 81. Partition. Алгоритм Кармаркар-Карпа (без оценок).
- (b) 82. Partition. PTAS-схема.
- (c) 83. Partition. Оценка жадности  $\frac{5}{6}$  ОПТ.
- (b) 84. Knapsack. Жадность по удельной стоимости не даёт приближения. PTAS-схема.
- (c) 85. Knapsack. FPTAS-схема.
- (+) 86. BinPacking. Алгоритмы FF, VF, FFD, BFD. (First, Best, Decreasing версии). Доказательство того, что FF – 2-ОПТ.
- (+) 87. BinPacking. Практически эффективное решение. За  $\mathcal{O}(n \cdot \text{iterations})$ .
- (+) 88. BinPacking. Решение за полином для случая  $a_i \geq \varepsilon$ , различных  $\leq k$ .
- (+) 89. BinPacking. PTAS-схема – избавляемся от ограничений на  $\varepsilon$  и  $k$ .
- (a) 90. Set Cover.  $\ln(n)$ -приближение. Решения без доказательства.
- (b) 91. Set Cover.  $\ln(n)$ -приближение. Доказательство оценки.
- (c) 92. Set Cover.  $\ln(n)$ -приближение во взвешенном случае. Реализация за линейное время в невзвешенном случае. 2-ОПТ приближение для Vertex Cover.
- (+) 93. Задача о надстроке. Сведение к TSP. Простое жадное решение. Оценка.

(+) 94. Задача о надстроке. Сведение к SetCover. Оценка  $(2 \ln n)$ .

### Центроиды

(a) 95. Центроидная декомпозиция: построение за  $\mathcal{O}(n \log n)$  времени,  $\mathcal{O}(n)$  памяти.

(b) 96. Центроидная декомпозиция: Disjoint Sparse Table.

(c) 97. Работа с масками: Disjoint Sparse Table за  $\mathcal{O}(1)$ .

(b) 98. Центроидная декомпозиция: подробности хранения, LCA, поиск минимума на пути за  $\mathcal{O}(LCA)$  и  $\mathcal{O}(\log \log n)$ , поиск gcd на отрезке массива.

(c) 99. Центроидная декомпозиция: количество путей длины  $d$ .

(+) 100. Центроидная декомпозиция: покраска вершин на расстоянии  $\leq d$ .

### Забывтое

(a) 101. NP. ILP. Формулировка. NP-полнота.

(b) 102. NP, PSPACE. Вложения  $NP \subseteq PSPACE \subseteq EXP$ .

(c) 103. RP.  $k$ -путь за  $\mathcal{O}(\exp(k) \cdot \text{poly}(n))$ .

(+) 104. Path. Алгоритм Йена на примере  $k$ -го пути (простого).

### Бонус

(+) 105. NP. Алгоритм Левина. Асимптотика времени работы. Область применения.

(+) 106. NP. 3 – COLORING  $\in$  NP – hard.

(+) 107. ТЧ. Квадратный корень по простому модулю за  $\mathcal{O}(\log p)$ .

(+) 108. Path. A\* и Iterative Deepening для переборных задач. Сравнение. Пример на задаче «сортировка операций поставить  $a_i$  на позицию  $a_i$ ». Beam Search. Применение к «калькулятору», «японскому компьютеру».

(+) 109. Быстрое редакционное расстояние, распознавание речи.

(+) 110. Path. Гольдберг. Основная идея. Лечение одной вершины за  $\mathcal{O}(V + E)$ .

Лечение пачки из хотя бы  $\sqrt{k}$  вершин за  $\mathcal{O}(V + E)$ .

Доказательство асимптотики  $\mathcal{O}(E\sqrt{V})$  для  $w_e \geq -1$ , асимптотика  $E\sqrt{V} \log N$  в общем случае.