

Вопросы к экзамену по алгоритмам SPb HSE, 1-й курс ПМИ, декабрь 2024

Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) темы на 3 (оценка 4-5).
- (b) темы на 4 (оценка 6-7).
- (c) темы на 5 (оценка 8-9).
- (+) факультативные темы (оценка 10) – нужно заботать 6 **любых** темы из 8.

Рекурсивный перебор

- (a) 1. Перебор всех перестановок за $\mathcal{O}(n! \cdot n)$.
- (b) 2. Перебор перестановок таких, что $|p_{i+1} - p_i| \geq 2$.
- (b) 3. C++: `next_permutation`. Сравнение с рекурсией.
- (c) 4. Перебор всех перестановок за $\mathcal{O}(n!)$.
- (a) 5. Перебор. Рюкзак без стоимостей, `subsetsum`, $\mathcal{O}(2^n)$.
- (b) 6. Перебор. Рюкзак со стоимостями, `knapsack` (ограбление банка), $\mathcal{O}(2^n)$.
- (a) 7. Перебор. `Subsets`. Запоминание $\mathcal{O}(n \cdot S)$.
- (c) 8. Перебор. `Knapsack`. Запоминание $\mathcal{O}(n \cdot S)$.
- (a) 9. Перебор. Задача о коммивояжере (развозка пиццы). $\mathcal{O}(n!)$.
- (b) 10. Перебор. Задача о коммивояжере (развозка пиццы). $\mathcal{O}(2^n \cdot n^2)$.
- (a) 11. Перебор. Задача о разбиении на возрастающие слагаемые.
- (a) 12. Перебор. Задача о разбиении на возрастающие слагаемые.
- (b) 13. Перебор. Задача о замощении доминошками $\mathcal{O}(2^{wh/2})$.
- (c) 14. Перебор. Задача о замощении доминошками $\mathcal{O}(2^w \cdot w \cdot h)$.

Динамика база

- (a) 15. DP. На примере задачи «калькулятор»: вперёд, назад, `relax`.
- (a) 16. DP. На примере задачи «калькулятор»: ленивая динамика, плюсы и минусы, `map`.
- (a) 17. DP. Восстановление ответа. Ссылки назад. На примере задачи «путь на матрице».
- (b) 18. DP. Восстановление ответа без ссылок назад. На примере задачи «путь на матрице».
- (a) 19. DP. Граф состояний. Вперёд, назад, ленивая на языке графа состояний.
- (a) 20. DP. На примере «калькулятор»: `checklist` (6 пунктов), что должно быть в решении динамикой.
- (a) 21. DP. Рюкзак без стоимостей.
- (b) 22. DP. Рюкзак со стоимостями.
- (b) 23. DP. Рюкзак + `bitset`.
- (c) 24. DP. Рюкзак. Восстановление ответа с линейной памятью.
- (a) 25. DP. Квадратные: НВП.
- (a) 26. DP. Квадратные: НОП.
- (b) 27. DP. Квадратные: Левенштейн.
- (a) 28. DP. *НОВП*. $\mathcal{O}(n^4)$.
- (b) 29. DP. *НОВП*. $\mathcal{O}(n^3)$.

- (c) 30. DP. НОВП. $\mathcal{O}(n^2)$.
- (a) 31. DP. Разбиение строки на палиндромы.
- (b) 32. DP. Хиршберг. Применение для НОП. Без времени работы.
- (c) 33. DP. Хиршберг. Применение для НОП, Левенштейна. Время работы.
- (c) 34. DP. Улучшенный Хиршберг, применение для рюкзака с весами.
- (b) 35. DP. bitset. Что умеет? За сколько? Как устроен? Перебор единичных бит.

Динамика задачи, идеи

- (b) 36. DP. Игра в камни. Несимметричная $win[n, whoMoves]$.
- (b) 37. DP. Игра в камни. Симметричная $win[n]$.
- (a) 38. DP. По дереву. Размер поддеревьев.
- (b) 39. DP. По дереву. Паросочетание минимального веса.
- (c) 40. DP. По дереву. Связное поддерево размера k минимального веса.
- (b) 41. DP. Разбиения числа n на неупорядоченные слагаемые.
- (b) 42. DP. Разбиения числа n на ровно k неупорядоченных слагаемых.
- (c) 43. DP. Разбиения числа n на слагаемые: $\mathcal{O}(n)$ памяти, как хранить ровно одну строку?
- (b) 44. DP. Проверка «подходит ли под шаблон». Линия памяти.
- (b) 45. DP. НВП за $\mathcal{O}(n \log n)$ (только длина).
- (c) 46. DP. НВП за $\mathcal{O}(n \log n)$ (восстановление ответа).
- (a) 47. DP. По подотрезкам. Задача «погрузка на корабль». Решение за $\mathcal{O}(n^4)$.
- (b) 48. DP. Измельчение перехода на примере задачи «погрузка на корабль». $\mathcal{O}(n^3)$.
- (c) 49. DP. Использование пары в функции на примере задачи «погрузка на корабль». $\mathcal{O}(n^2)$.
- (a) 50. DP. Рекуррентные соотношения за $\mathcal{O}(k^3 \log n)$.
- (b) 51. DP. Пути в графе за $\mathcal{O}(kn^2)$ и $\mathcal{O}(n^3 \log k)$.
- (a) 52. DP. Задача «почтовые отделения». Решение за $\mathcal{O}(n^4 + n^2k)$.
- (b) 53. DP. Задача «почтовые отделения». Использование частичных сумм для вычисления функции на отрезке за $\mathcal{O}(1)$ с предподсётом $\mathcal{O}(n)$. Решение за $\mathcal{O}(n^2k)$.
- (b) 54. DP. Оптимизации. Кнут. $\mathcal{O}(n^2)$.
- (c) 55. DP. Оптимизации. Разделяй и властвуй. $\mathcal{O}(nk \log n)$.
- (a) 56. DP. Стресс-тестирование для проверки гипотез на примере «почтовые отделения».
- (a) 57. DP. По подотрезкам. Оптимальное умножение матриц. $\mathcal{O}(n^3)$.
- (a) 58. DP. Комбинаторика. Перестановка по номеру.
- (a) 59. DP. Комбинаторика. Номер по перестановке.
- (b) 60. DP. Комбинаторика. Скобочная последовательность по номеру.
- (b) 61. DP. Комбинаторика. Номер по скобочной последовательности.
- (c) 62. DP. Комбинаторика. Следующий лексикографически. 2 примера.
- (c) 63. DP. Комбинаторика. Количество чисел на отрезке $[L, R]$ кратных t за $\mathcal{O}(t \log R)$.

Динамика по подмножествам

- (a) 64. DP. Представление множеств масками бит. 10 операций за $\mathcal{O}(1)$.
- (a) 65. DP. Число бит (элементов) и сумма в множестве.
- (a) 66. Рекурсия. Число бит (элементов) в множестве рекурсией.
- (a) 67. DP. Гамильтонов путь за $\mathcal{O}(2^n n^2)$.
- (b) 68. DP. Гамильтонов путь за $\mathcal{O}(2^n n)$ времени и $\mathcal{O}(2^n)$ памяти.
- (b) 69. DP. Гамильтонов цикл.

- (a) 70. DP. Перебор всех подмножеств. Два доказательства 3^n .
- (b) 71. DP. Перебор всех надмножеств.
- (a) 72. DP. Вершинная покраска за $\mathcal{O}(4^n)$. Связь с независимыми множествами.
- (a) 73. DP. Вершинная покраска за $\mathcal{O}(3^n)$.
- (b) 74. DP. Вершинная покраска за $\mathcal{O}(2.44^n)$. Общий алгоритм, время работы 2.44^n .
- (c) 75. DP. Способ перебора и обоснование количества максимальных по включению независимых подмножеств. Пример, на котором оценка достигается.
- (b) 76. DP. Предподсчёт независимости всех подмножеств за $\mathcal{O}(2^n)$.
- (c) 77. DP. Количество независимых подмножеств для каждого множества за $\mathcal{O}(2^n)$.
- (b) 78. DP. Развёрнутая битовая запись.
- (a) 79. DP. Биты. Степень двойки? Номер старшего бита?
- (b) 80. DP. Биты. Номер младшего бита за $\mathcal{O}(1)$.
- (c) 81. DP. Биты. Чётность количества бит. Количество бит.
- (b) 82. DP. SetCover. $\mathcal{O}^*(2^{\min(n,m)})$.
- (b) 83. DP. Перевозка грузов за $\mathcal{O}^*(3^n)$.
- (c) 84. DP. Перевозка грузов за $\mathcal{O}(2^n n)$.
- (c) 85. DP. Количество паросочетаний за $\mathcal{O}(2^n n)$.
- (c) 86. DP. Йатс. $\forall A$ сумма по всем подмножествам A за $\mathcal{O}(2^n n)$.
- (a) 87. DP. Lazy. Количество клик рекурсивным перебором за $\mathcal{O}(2^{n/2})$.
- (b) 88. DP. Lazy. Количество клик рекурсивным перебором: обоснование времени работы $\mathcal{O}(2^{n/2})$.
- (a) 89. DP. Lazy. Перебор для замощения доминошками за $\mathcal{O}(2^{wh/2})$.
- (b) 90. DP. Lazy. Динамика для замощения доминошками, оценка $\mathcal{O}(hw2^{\min(h,w)})$ числа состояний.
- (c) 91. DP. Lazy. Оптимизация константы рекурсивной версии. Нерекурсивная версия.
- (a) 92. Meet-In-The-Middle. Для игры «из исходной перестановки за 40 ходов получи нужную».
- (a) 93. Meet-In-The-Middle. Для рюкзака без стоимостей.
- (b) 94. Meet-In-The-Middle. Для рюкзака со стоимостями.
- (c) 95. Meet-In-The-Middle. Для количества клик за $\mathcal{O}(2^{n/2} n^2)$.
- (c) 96. Meet-In-The-Middle. Для количества клик за ровно $\mathcal{O}(2^{n/2})$.
- (c) 97. DP. Покрытие доминошками, версия без рекурсии.
- (c) 98. ФВИ. Покраска вершин графа за $\mathcal{O}(2^n n)$.
- (c) 99. Перебор. Максимальная клика за $\mathcal{O}(1.38^n)$.

DFS

- (a) 100. Хранение графа. Списки `vector<vector>`. Матрица `vector<bitset>`.
- (b) 101. Хранение графа. `vector<set>`, сравнение трёх способов.
- (c) 102. Хранение графа. Мультисписок. Сравнение с `vector<vector>` (время, память).
- (a) 103. DFS. Собственно dfs. Компоненты связности.
- (a) 104. DFS. Восстановление пути в dfs. Обратный ход рекурсии.
- (a) 105. DFS. DAG. TopSort. Определение и нахождение.
- (a) 106. DFS. Поиск цикла в орграфе.
- (a) 107. DFS. Остовное дерево dfs. Как найти?
- (b) 108. DFS. Классификация рёбер относительно остовного дерева.
- (c) 109. DFS. Отсутствие перекрёстных рёбер для неор графа.
- (a) 110. DFS. Сильная связность. Def. Простой алгоритм выделения к.с.с. вершины v за $\mathcal{O}(V+E)$.
- (b) 111. DFS. Поиск всех к.с.с. за $\mathcal{O}(V + E)$. Только алгоритм.

- (c) 112. DFS. Поиск всех к.с.с. за $\mathcal{O}(V + E)$. Обоснование корректности.
- (b) 113. DFS. Поиск конденсации за $\mathcal{O}(V + E)$.
- (c) 114. DFS. Поиск транзитивного замыкания за $\mathcal{O}(VE/w)$.

Бонус

- (+) 115. Inplace. Merge за $\mathcal{O}(n)$.
- (+) 116. Heap. Pairing Heap.
- (+) 117. DP. Кнут. Обоснование в задаче «почтовые отделения».
- (+) 118. DP. Лямбда. Примеры задач.
- (+) 119. DP. Решение k -subsetsum (выбрать ровно k предметов с суммой ровно S) за $\mathcal{O}(\sqrt{kn}S)$. Diff для файлов за $\mathcal{O}(n \cdot ans)$.
- (+) 120. ФВИ. Количество путей вправо-вверх из $(1, 1)$ в (n, n) , не проходящих через дырки. Количество матриц $n \times n$: в каждой строке и столбце $\min = 1$.
- (+) 121. ФВИ. Количество гамильтоновых путей.
- (+) 122. DP и ФВИ. OR-свёртка.