SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, весна 2023/24
Практика по алгоритмам #10

Мосты, двусвязность, покраски
21 марта

Собрано 20 марта 2024 г. в 22:28

Содержание

Мосты, двусвязность, покраски

1. **Покраска планарного графа**

   Приведите алгоритм покраски вершин планарного графа в 6 цветов.

2. **Локальные оптимизации**

   Рассмотрим алгоритм покраски вершин в ровно k цветов: изначально все вершины покрашены в случайные цвета... а что делать потом?

3. **Двусвязность**

   a) Даны две вершины, сказать можно ли провести через них простой цикл?
   b) Даны два ребра, сказать можно ли провести через них простой цикл?
   c) (*) Даны две вершины в орграфе, сказать, можно ли провести через них простой цикл?
   d) Удалить вершину из графа так, чтобы граф распался на максимальное число компонент связности?

4. **3-связность**

   Проверить граф на 3-связность.

   a) Вершинная за $\mathcal{O}(VE)$.
   b) Рёберная за $\mathcal{O}(VE)$.

5. **Необходимые для достижимости ребра**

   Дан неорграф.
   Найти все рёбра, которые обязательно будут лежать на пути от a до b. $\mathcal{O}(V+E)$.

6. **Необходимые для достижимости вершины**

   Дан неорграф.
   Найти все вершины, которые обязательно будут лежать на пути от a до b. $\mathcal{O}(V+E)$.

7. **Генерация объектов**

   a) Случайный граф, который точно можно покрасить в k цветов?
   b) Случайный двусвязный граф?
   c) Случайный граф с ровно одним мостом?

Разбор задач практики

1. **Покраска планарного графа**

   $E \leqslant 3V - 6 \Rightarrow \exists v\colon\ \deg v \leqslant 5 \Rightarrow$ удалим её и по индукции жадно докрасим остаток.

2. **Локальные оптимизации**

   Простой способ: пытаемся перекрасить вершину, чтобы уменьшилось число «пар соседних вершин, покрашенных в один цвет». Более эффективный способ: почти такой же, но мы ищем цепочку перекрашиваний $color[v_1]\colon c_0 \to c_1,\ color[v_2] = c_1 \to c_2, \ldots$

3. **Двусвязность**

   Цикл через вершины можно, если в одной компоненте рёберной 2-связности.

   Цикл через рёбра можно, если в одной компоненте вершинной 2-связности.

   В орграфе NP-трудно.

   Удалить вершину: удалить точку сочленения, у которой максимальное число соседей из разных компонент.

4. **3-связность**

   a) Вершинная. Нужно узнать, можно ли удалением двух вершин разрушить связность. Одну переберем, удалим, на оставшемся графе за $\mathcal{O}(E)$ проверяем наличие точек сочленения.
   b) Рёберная. Можно так же перебрать, выйдет $\mathcal{O}(E^2)$. Но ясно, что для разрушения связности нужно удалить хоть одно ребро из остовного дерева. Так что перебираем только $\mathcal{O}(V)$ ребер.

5. **Необходимые для достижимости ребра**

   Без разбора, т.к. на других курсах используется в дз.

6. **Необходимые для достижимости вершины**

   Без разбора, т.к. на других курсах используется в дз.

7. **Генерация объектов**

   Сгенерим k долей, накидаем между ними рёбра, получим случайный граф, который точно можно покрасить в k цветов.

   Случайный двусвязный граф. Способ #1: сгенерить что-то заранее двусвязное, например, гамильтонов цикл и добавить случайных рёбер. Способ #2: генерить случайный граф, пока он не станет двусвязным.

   Генерим случайное разбиение вершин на две части, каждую генерим, как случайный двусвязный граф, проводим случайный мост.

Домашнее задание

1. (0) **В поисках ДЗ**

   Вы открыли этот файлик, потому что пришло время делать теордз, почитать условия задач, вспомнить, кто такие мосты и зачем они нужны. Теордз в этот раз нет. Лучше доберитесь до центра Питера, там тоже есть прекрасные мосты. А если всё-таки есть настрой поботать, откройте контест, он есть.