SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, весна 2023/24
Практика по алгоритмам #8

MST и Форд-Беллман
6 марта

Собрано 7 марта 2024 г. в 12:11

Содержание

MST и Форд-Беллман

1. **Дерево кратчайших путей**

   Дан орграф без отрицательных циклов (отрицательные ребра могут быть) и расстояния от s до всех вершин в графе. Восстановить дерево кратчайших путей за $\mathcal{O}(E)$.

2. **Дейкстра вышел погулять**

   Дан взвешенный орграф ($n, m \leqslant 10^5, w_e \geqslant 0$). Если мы стартуем в s, идём по некоторому пути и останавливаемся в вершине v, мы получим удовольствие $a_v - w(path(s, v))$. Для каждой вершины графа скажите, куда идти, чтобы получить максимальное удовольствие от прогулки?

3. **Система неравенств**

   Дана система из m неравенств на n переменных вида $x_i - x_j \le \delta_{ij}$.
   Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $\mathcal{O}(nm)$.

4. **Обмен валют**

   Есть n валют и m обменников. i-й обменник предлагает менять валюту a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i. Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные m обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты. $\mathcal{O}(nm)$.

5. **Единственность MST**

   Доказать, что в графе с различными весами рёбер MST единственно.

6. **Перестроение MST**

   Дан взвешенный граф G. Дано минимальное остовное дерево на нем.
   У ребра e поменяли вес. Найти новое минимальное остовное дерево за $\mathcal{O}(V + E)$.

   Разберите все 4 случая!

7. **Второе по весу ST**

   Найти второе по весу остовное дерево: (a) за полином, (b) за $\mathcal{O}(V^2 + E)$.

8. **(*) Краскал наоборот**

   Пусть дан связный взвешенный неорграф, будем рассматривать его ребра в порядке невозрастания веса и удалять текущее ребро, если связность графа при этом не нарушается. Докажите, что этот алгоритм находит минимальный остов, или придумайте контрпример.

9. **(*) Борувка и MST**

   Верно, ли, что для каждой вершины нужно добавить в MST минимальное по весу смежное ребро? Как на этой идее построить корректный алгоритм для MST?

Разбор задач практики

1. **Дерево кратчайших путей**

   Остовное дерево dfs по ребрам $e = (v, u)$, где $d[v] + w_e = d[u]$.

2. **Дейкстра вышел погулять**

   Можно как будто для каждой вершины запустить Дейкстру, но это долго.
   Можно пустить одну Дейкстру «с конца»: изначально $d_v = -a_v$, кидаем всех в кучу, и запускаем Дейкстру по обратным рёбрам.

3. **Система неравенств**

   $x_i - x_j \leqslant \delta_{ij}$. Заметим сходство с кратчайшими расстояниями в орграфе: для любого ребра $e\colon u \to v$ верно $d[v] - d[u] \leqslant w[e] \Leftrightarrow d[u] + w[e] \geqslant d[v]$.

   Итого решение – строим граф из n вершин, для каждого неравенства $x_i - x_j \le \delta_{ij}$ проводим ребро $j \to i$ веса δ_{ij}. Также добавим фиктивную вершину s и ребра веса 0 из нее во все, запускаем Форда-Беллмана из s, возвращаем $x_i = d[i]$. Если нашелся отрицательный цикл, у системы нет решения (сложим неравенства по циклу, получим $0 \leqslant \sum \delta_e < 0$, противоречие).

   s можно не добавлять, просто начать Форд-Беллмана с массива d, заполненного нулями.

4. **Обмен валют**

   Обменник валюты a_i на валюту b_i по курсу c_i/d_i – ребро из a_i в b_i с весом c_i/d_i.
   Нас интересует цикл, на котором произведение весов ребер больше 1. Тогда сумма минус логарифмов там меньше нуля, отрицательный цикл.

   Метод итераций. Можно итеративно улучшать массив количеств валют, пока улучшается. Если итераций больше n, есть цикл, который восстанавливается как в Форд-Беллмане.

5. **Единственность MST**

   a) Как в лемме о разрезе: рассмотрим Краскала, пусть в какой-то момент он не берёт минимальное ребро, увидим цикл, сделаем замену, благодаря тому, что веса различны, вес остова строго уменьшится.

   b) **Простой способ.** Строим как-нибудь MST, обозначим его T.

      Строим второе дерево: запустим Краскала, который пытается при равенстве весов сперва брать рёбра не из T. Если новое дерево равно T, то MST единственно.

      Второй способ.

      Запускаем алгоритм Краскала. Внутри обрабатываем ребра группами одинакового веса.
      Посмотрим на все рёбра веса w. Выберем из них те, которые сейчас соединяют разные компоненты (образованные меньшими ребрами), но в дерево пока не добавим.
      По выбранным рёбрам делаем второй проход, но уже объединяя компоненты и добавляя рёбра в остовное дерево.
      Если какое-то помеченное ребро e_i не добавилось в дерево, значит, его добавление создаёт цикл по рёбрам веса $w \Rightarrow$ MST не единственно. Если ни разу не возникла такая ситуация, MST единственно. Доказательство аналогично (a) «пусть не взяли, сделаем замену...».

6. **Перестроение MST**

   Обозначим наше минимальное дерево T, а меняющееся ребро e.

   • Если **уменьшилось** $e \in T$, или **увеличилось ребро** $e \notin T$, MST не изменилось.

   • Пусть **увеличилось** $e \in T$. Удалим e, получим разрез.
   Добавим минимальное ребро через разрез (им может оказаться снова e).
   Время $\mathcal{O}(E)$ (раскрасить компоненты, перебрать рёбра).
   Корректность. Выбранное нами ребро точно нужно брать по лемме о разрезе, возьмём. Далее запустим Краскала, он возьмёт ровно те же рёбра, что и раньше.

   • Пусть **уменьшилось** $e \notin T$. Рассмотрим $T+e$, e образует цикл. Если в цикле максимальное ребро f больше e, заменим f на e. Время работы = времени поиска максимума на пути.
   Корректность. Если $w_f \leqslant w_e$, шаги Краскала не изменятся. Если $w_f > w_e$, удалим f, получим разрез, e – минимальное в разрезе (если не e и не f, T было не минимальным) $\Rightarrow$ по лемме о разрезе e выгодно взять. Далее Краскал возьмёт ровно те же рёбра, что и раньше.

7. **Второе по весу ST**

   Обозначим первое по весу T_1, второе по весу T_2.
   Переберём (угадаем) $e \in T_2 \setminus T_1$, рассмотрим $e + T_1$, $e(a, b)$ образует цикл.
   Найдём f максимальное ребро на пути $a \rightsquigarrow b$ в T_1.
   При замене $f \to e$, вес остова меняется на $w_e - w_{f(e)}$, $T_2 = T_1 + e - f$, где e: $w_e - w_{f(e)} = \min$.

   Корректность. Докажем, что $\forall e$ среди всех остовов, содержащих e, мы нашли минимальный. Мысленно запустим Краскала, он взял ровно те же рёбра, что и при построении T_1. Кроме последнего рассмотренного ребра на цикле – f.

   Время работы.
   Искать максимальный вес на пути можно за $\mathcal{O}(n)$, тогда получим время $\mathcal{O}(mn)$.
   Можно за $\mathcal{O}(n^2)$ предподсчитать все n^2 максимумов, тогда время $\mathcal{O}(n^2 + m)$.
   Можно искать максимум на пути ещё быстрее. Даже за $\mathcal{O}(1)$.

8. **(*) Краскал наоборот**

   Работает. По индукции. Потому что Краскал не возьмёт последнее ребро. Если все веса различны – очевидно. Если бывают одинаковые – сделаем их различными, заменив на $\langle w_e, e \rangle$.

9. **(*) Борувка и MST**

   См. конспект ПМИ.

Домашнее задание

1. **(1) Ремонт дорог**

   Дана страна, состоящая из городов и двусторонних дорог. Каждая дорога или в рабочем состоянии, или требует ремонта стоимости w_i. Ездить можно только по дорогам в рабочем состоянии. За минимальную стоимость отремонтировать некоторые дороги так, чтобы из любого города страны можно было добраться в любой другой.

2. **(2+1) Кратчайший путь**

   Дан неориентированный взвешенный граф. Сделайте за $\mathcal{O}(E \log V)$ предподсчёт, и научитесь затем для любой пары вершин возвращать путь между a_i и b_i, в котором минимальный вес ребра максимален.

   a) **(2)** За $\mathcal{O}(V)$.
   b) **(+1)** За $\mathcal{O}($**размера ответа**$)$.

   Заметьте, что найти путь за нужное время не так уж и просто!

3.1. Дополнительная часть

1. **(3) Заправки**

   Страна – города и односторонние дороги. У нас есть машина с баком бензина размера C, в некоторых городах есть заправки с бесконечным бензином. Для каждой дороги известно, сколько бензина нужно потратить, чтобы по ним проехать. Мы стартуем в городе s с полным баком. До куда мы сможем доехать?

   a) **(1)** $\mathcal{O}(VE)$
   b) **(+2)** $\mathcal{O}(E \log V)$