

SPb HSE, ПАДИИ, 1 курс, весна 2023/24

Практика по алгоритмам #4

dfs

8 февраля

Собрано 8 февраля 2024 г. в 12:41

Содержание

1. dfs	1
2. Разбор задач практики	2
3. Домашнее задание	3
3.1. Обязательная часть	3
3.2. Дополнительная часть	3

dfs

1. Треугольник

Дан неорграф, посчитать количество треугольников (K_3).

2. Цикл через вершину

Дан оргграф и вершина v . Найти просто цикл, проходящий через v .

3. А вы точно граф?

Даны две операции: $x \rightarrow (2x+1) \bmod N$ и $x \rightarrow (x^2 + 7) \bmod N$. x целое, $N = 10^6 + 3$. Можно ли из числа 13 получить число 17? Если да, то как?

4. Ямки

В некоторых вершинах оргграфа есть ямки. Нужно дойти их a в b не более двух раз наступив в ямку. Как?

5. Строкапуты

Дан оргграф, на рёбрах написаны буквы. Найдите путь в оргграфе, на котором написана ровно данная строка s . За полином.

6. Нечётный цикл

За $\mathcal{O}(V+E)$ найти в неорграфе цикл нечетной длины.

7. Две клики

Есть n человек, между ними есть симметричное отношение дружбы. Разбейте человек на две группы, чтобы в каждой группе все друг с другом попарно дружили.

8. Кластеризация на два кластера.

Даны объекты, и матрица расстояний d_{ij} (непохожести объектов). Нужно разбить объекты на два множества так, чтобы максимальный из диаметров множеств был минимален.

Пример объектов: точки на плоскости.

Пример объектов: тексты и их расстояние Левенштейна.

9. (*) Транзитивное замыкание

Дан оргграф, построить матрицу достижимости. $V \leq 20\,000$, $E \leq 200\,000$.

Разбор задач практики

1. Треугольник

$\mathcal{O}(V^3)$ — перебираем тройку вершин и матрицей смежности проверяем.

$\mathcal{O}(VE)$ — перебираем вершину и ребро, и матрицей смежности проверяем.

Ещё лучше: $a \rightarrow (b \geq a) \rightarrow (c \geq b)$ (фиксируем a , перебираем два ребра) и матрицей смежности проверяем наличие ac . Чтобы перебирать только рёбра в большие, списки смежности сортированы.

2. Цикл через вершину

dfs из вершины v «в себя». Можно модифицировать dfs, чтобы он умел в v зайти второй раз. Можно создать v' копию v и $\text{dfs}: v \rightarrow v'$.

3. А вы точно граф?

В условии описан граф из N вершин и $2N$ рёбер. dfs по нему.

4. Ямки

Вершина нового графа $\langle v, k \rangle$ — вершина старого и сколько раз уже были в ямке.

5. Строкапуты

Динамика $\text{dp}[v, i]$ — можно ли оказаться в вершине v , выписав первые i символов строки s . Начальное состояние $\forall v \text{ dp}[v, 0] = \text{true}$. Конец пути — любая v : $\text{dp}[v, |s|] = \text{true}$.

6. Нечётный цикл

Красим граф в два цвета. Если видим ребро из текущей, ведущее в вершину такого же цвета — нашли нечетный цикл. Если цикл мы искали dfs-ом, он как раз лежит на стеке рекурсии.

7. Разделение на две клики

Инвертируем все ребра: если между парой вершин нет ребра, добавим, иначе уберем. $g[i, j] \hat{=} 1$. Теперь надо разбить на два независимых множества \Leftrightarrow покрасить в два цвета.

Важное замечание: это работает за $\mathcal{O}(V^2)$, в инвертированном графе ребер $V^2 - E$.

8. Кластеризация на два кластера.

Бинпоиск по ответу.

Внутри если $d_{ij} > x$ нужно класть i и j в разные части \Rightarrow раскраска в два цвета.

Более продвинутое решение: сортируем рёбра по возрастанию, добавляем их в таком порядке и СНМ-ом поддерживаем двудольность.

9. Транзитивное замыкание

Сконденсируем граф. Из каждой вершины достижима её ксс и ещё какие-то. Какие?

Динамика по конденсации $\text{bitset dp}[v]$ — множество вершин, достижимых из v .

$\text{dp}[v]$ — это OR bitset 'ов детей v . Динамика ленивая (dfs-о-динамика).

Время работы $\mathcal{O}(VE/w)$.

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. (3) Путь через ад

Дан оргграф. В некоторых вершинах живут монстры. Монстры бывают трёх типов. Проходя через некоторые вершины, можно получить иммунитет к некоторым типам монстров (три разных иммунитета). В каждый момент времени каждый из трёх иммунитетов или есть, или нет, копить их нельзя. Иммунитет при встрече с монстром спасает от гибели ровно один раз и пропадает. Можно ли из вершины a дойти до вершины b и не умереть? ($V, E \leq 10^5$).

3.2. Дополнительная часть

1. (2) Ромбики

Найти в неорграфе «ромбик с диагональю»: 4 вершины a, b, c, d и 5 рёбер ab, bc, cd, da, ac .

Оценка: (1) $\mathcal{O}(V^3)$, (1) $\mathcal{O}(VE)$, (+1) $\mathcal{O}(E^{3/2})$.