

Второй курс, осенний семестр 2022/23

Практика по алгоритмам #10

Линейная алгебра

2 декабря

Собрано 28 ноября 2022 г. в 15:47

Содержание

1. Линейная алгебра	1
2. Разбор задач практики	3
3. Домашнее задание	5
3.1. Обязательная часть	5
3.2. Дополнительная часть	6

Линейная алгебра

1. Разложение вектора в базисе

- Базис – произвольный набор линейно независимых векторов.
- Базис – столбцы треугольной матрицы.
- Ортогональный базис.

2. Точка в параллелепипеде

Даны d -мерная точка и d -мерный параллелепипед.
Проверить, лежит ли точка в параллелепипеде.

3. Найти расстояние от точки до подпространства

Дана d -мерная точка и набор из k d -мерных векторов, базис линейного подпространства.
Найти расстояние от точка до подпространства.

- Ортогонализацией базиса.
- Методом Гаусса.
- (*) Решая $|Ax - b| \rightarrow \min$

4. Выбор базиса минимального веса

Дан набор векторов с весами, вектора образуют линейное пространство. Выбрать из данных векторов базис этого пространства минимального веса.

5. Найти рекуррентность

Вы знаете, что последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ образована линейным рекуррентным соотношением с коэффициентами $1, 1$: $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$. Решим обратную задачу: дана последовательность длины n , найти минимальное k и k коэффициентов, задающие данную последовательность, как линейную рекуррентность.

$\mathcal{O}(n^3 \log n)$, $\mathcal{O}(n^3)$, $\mathcal{O}(n + k^3 \log k)$, (*) $\mathcal{O}(n + k^3)$.

6. Минимальное квадратичное

Дана точка b и вектора a_1, \dots, a_n . Выразить вектор $b = \sum a_i x_i$: $\sum x_i^2 \rightarrow \min$.

7. Вероятность выжить

- Дан грид с дырками. Вы начинаете в $(1, 1)$ за ход переходите с вероятностью $\frac{1}{2}$ вправо, с вероятностью $\frac{1}{2}$ вверх. Если пытаетесь выйти за пределы поля, ничего не происходит. Если попадаете в дырку, умираете. С какой вероятностью вы дойдёте до клетки (n, m) живым?

- $p_{right} = \frac{1}{3}, p_{left} = \frac{1}{6}, p_{up} = \frac{1}{3}, p_{down} = \frac{1}{6}$.

То есть, граф теперь содержит циклы и вообще непонятно, сходится ли процесс.

8. Онлайн

Вам дана матрица A , на вас онлайн сыпятся запросы y_i . Нужно находить x : $Ax = y_i$.

9. (*) Матричная игра

Игра на матрице. Первый выбирает строку, второй столбец. Делают они это независимо, не зная, что делает соперник. Выигрыш первого игрока – число в матрице. Первый его максимизирует, второй минимизирует. Вероятностная стратегия для первого: выбрать такие вероятности для строк p_1, \dots, p_m , чтобы математическое ожидание выигрыша не зависит от хода второго игрока. Найти любой такой вектор p . Не нужно максимизировать выигрыш.

10. (*) Задача про XOR

Даны n чисел от 0 до $2^n - 1$. Выбирается случайное подмножество A этих n чисел. Найдите за $2^{n/2} \cdot \text{poly}(n)$ матожидание величины $\text{popcount}(\text{XOR}(A))^2$.

Подсказка: ответ для $\{a_1, a_2\}$ равен ответу для $\{a_1, a_2 \hat{=} a_1\}$

Разбор задач практики

1. Разложение вектора в базисе

Раскладываем столбец b в базисе A (столбцы матрицы A – вектора базиса).

а) Базис – произвольный набор линейно независимых векторов.

Придётся за $\mathcal{O}(n^3)$ Гауссом решить систему $Ax = b$.

б) Базис – трапецевидная матрица.

Тогда метод Гаусса уже не нужен, достаточно восстановить x за $\mathcal{O}(n^2)$.

в) Ортогональный базис. a_i – базисный вектор. Тогда $x_i = \frac{\langle b, a_i \rangle}{\langle a_i, a_i \rangle}$. $\mathcal{O}(n^2)$.

Если базис ещё и ортонормированный, $|a_i| = 1$, то $x_i = \langle b, a_i \rangle$.

2. Точка в параллелепипеде

Сдвинем один из углов параллелепипеда в точку 0. Стороны параллелепипеда, исходящие из точки 0, – вектора, образующие базис пространства. Разложим нашу точку в базисе. Точка внутри iff все координаты от 0 до 1.

3. Найти расстояние от точки до подпространства

Пусть точка – b . Пусть $v = Ax$: $|Ax - b| = \min$

а) Сделаем базис ортогональным. Вычтем из b проекции на все базисные вектора. Останется нормаль к пространству $b - v$.

б) v – точка в подпространстве. Ищем такую точку v , что $v - b$ перпендикулярно всему пространству \Leftrightarrow скалярные произведения со всеми векторами A равны нулю. Получаем $A^t(Ax - b) = 0 \Leftrightarrow x = (A^t A)^{-1} A^t b$.

в) $|Ax - b| \rightarrow \min \Leftrightarrow (Ax - b)^2 \rightarrow \min$. Дифференцируем, приравниваем производную к нулю, получаем такое же уравнение, как в предыдущем пункте.

4. Выбор базиса минимального веса

Будем добавлять вектора в порядке увеличения веса. Почему эта жадность верна?

Пусть $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$ – веса векторов, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ – индексы в нашем ответе, $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ – индексы в таком оптимальном ответе, что $\text{LCP}(a, b) = \max$. Рассмотрим $\min i: a_i \neq b_i$. Странно, если $a_i > b_i$, мы могли добавить вектор b_i в базис. Возьмём линейно независимый набор $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ и будем добавлять в него вектора из $\{b_i\}$.

Успешно добавятся все вектора кроме одного... А вес не добавленного не менее w_{a_i} .

Мы получили набор c : $(w(c) < w(b)) \vee (w(c) = w(b) \wedge \text{LCP}(a, c) > \text{LCP}(a, b))$. Противоречие.

5. Найти рекуррентность

Предполагаем, что $k \leq \frac{n}{2}$. Записываем систему $a_n = a_{n-1}x_1 + a_{n-2}x_2 \dots, a_{n-1} = a_{n-2}x_1 + a_{n-3}x_2 + \dots, a_{\frac{n}{2}+1} = \dots$. В каждой правой части $\frac{n}{2}$ x -ов. Минимальное k равно рангу матрицы (без док-ва). Если мы знаем, что $k \leq m$, то записав систему $m \leq m$, мы можем найти m коэффициентов линейной рекуррентности длины m .

Решение за $\mathcal{O}(n^3 \log n)$: бинпоиск по k , внутри Гаусс.

Решение за $\mathcal{O}(n^3)$: считаем ранг Гауссом (нашли k), затем запускаем ещё одного Гаусса (нашли коэффициенты).

6. Минимальное квадратичное

Найдём какое-нибудь решение $Ax_0 = b$. Искомое решение $x^* = x_0 - x$, где $Ax = 0$. Множество решений $Ax = 0$ – линейное подпространство. Теперь задача такая: найти в этом пространстве вектор x ближайший к x_0 . См. задачу про расстояние до подпространства.

7. Вероятность выжить

x_{ij} – вероятность выжить, начиная из клетки i, j .

- а) Динамика, т.к. граф ацикличесен.
- б) Граф с циклами, но x_{ij} линейно выражается через соседей, поэтому Гаусс.

8. Онлайн

Для $\det A \neq 0$: находим за n^3 LU-разложение $A = LU$. Ответ на запрос за $\mathcal{O}(n^2)$: $x = L^{-1}U^{-1}y_i$

Для произвольной системы, можно сделать обычного итеративного Гаусса, который для каждой строки таскает ещё и вектор коэффициентов, как строка выражается из исходных (длина $\leq \min(n, m)$). Важно запомнить не только строки базиса, но и не базисные, т.к. каждая задаёт условие вида $\sum_j y_{ij} = 0$, которое предстоит проверять для y_i .

9. (*) Матричная игра

Пусть второй игрок выберет j -й столбец, тогда матожидание выигрыша равно $E_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_n a_{nj} = t$. Записываем уравнения $E_1 = E_2 = \dots = t$, где неизвестные p_1, p_2, \dots, p_n, t . Добавляем уравнение $\sum p_i = 1$.

10. (*) Задача про XOR

Подсказка: ответ для $\{a_1, a_2\}$ равен ответу для $\{a_1, a_2 \hat{=} a_1\}$. n n -битных чисел задают матрицу $n \times n$. Приведём её Гауссом к виду диагональ + прямоугольник треша + нулевые строки. Пусть ранг матрицы (длина диагонали) равен k . Заметим, что есть решение за 2^k и есть решение динамикой по строкам с $2^{n-k} k^2$ состояниями. Получаем $2^{\min(k, n-k)} \text{Poly}(n) \leq 2^{n/2} \text{Poly}(n)$.

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. (2+2) Винни-Пух и мёд

У Винни Пуха есть бесконечные запасы из k видов горшочков мёда. Каждый вид горшочков требует сколько-то дней от Пуха, чтобы съесть весь мёд из одного горшочка.

Пух уже провёл серию экспериментов: брал несколько горшочков, записывал, какие горшочки взял, день недели, когда начал эксперимент, после чего съедал весь мёд и записывал день недели, когда эксперимент закончился. По понятным причинам Пух очень любит экспериментировать.

А Кролик не любит мёд, но любит предсказывать будущее. Помогите Кролику, зная результаты k экспериментов, сказать, можно ли однозначно сказать результат следующего. Оцените время работы алгоритма.

- (2) Винни берёт произвольные множества горшков.
- (2) Винни всегда берёт горшки не более чем двух разных типов.

2. (3) Matrix decomposition

Дана матрица A размера $n \times m$. Найти такое представление $A = BC$, что B имеет размер $n \times k$ и k минимально. Подсказка: думайте про A , как про пространство строк.

3. (2) Расстояние в n -мерном пространстве

Даны m точек в n -мерном пространстве и k линейно независимых векторов, задающих подпространство. За $\mathcal{O}(kn(k+m))$ найти для каждой точки расстояние до подпространства.

4. (3) Оптимальное представление точек

Даны $m \geq n$ n -мерных векторов, порождающих всё n -мерное пространство. Даны k запросов: выразить точку в виде линейной комбинации, минимизируя сумму квадратов коэффициентов. Ответить на все запросы за $\mathcal{O}((m+k)n^2)$.

5. (4) Матожидание времени путешествия

Дана полоска из n клеток. Изначально мы в первой. Каждый ход выбирается случайное x из множества

- (2) $\{0, 1, 2, \dots, k\}$
- (2) $\{-\frac{k}{2}, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, k\}$

И мы ходим $i \rightarrow \max(1, \min(i+x, n))$. Найти матожидание числа ходов до клетки n . Чем быстрее, тем лучше.

3.2. Дополнительная часть

1. (3) Гаусс на многочленах

Дана квадратная матрица A из $n \times n$ элементов $\mathbb{R}[x]$. $k = \max \deg$ многочленов в матрице.

- (1) Найти её определитель за $\mathcal{O}(c^n \cdot \text{poly}(k))$.
- (2) В предположении, что матрица не вырожденная, решите систему уравнений $Ax = b$.
- (+1) Найти её определитель за полином.

2. (4) Разбиение графа на две доли

Дан неориентированный граф. Нужно разбить его вершины на две доли так, чтобы после удаления рёбер между долями степени всех вершин были чётны.

3. (3) Пересечение сфер

Даны k n -мерных сфер. Найти все точки пересечения, или сказать, что их бесконечно много.

4. (3) Матожидание пути

Дан грид со стенками и дырками, мы идём из $(1, 1)$ в (n, m) .

В каждый момент времени вероятности сдвинуться вправо и вверх равны $\frac{1}{3}$, а влево и вниз $\frac{1}{6}$.

При попытке идти в стенку ничего не происходит. При попытке идти в дырку мы умираем.

Грид таков, что мы или свалимся в дырку, или дойдём до конца.

Пусть мы дошли до конца, не упав в дырку. Какая средняя длина пути была пройдена?

5. (4) Максимальный равномерный поток

Поток называется равномерным, если для любых двух вершин a и b любые два пути из a в b , по которым течёт поток, имеют одинаковую длину (количество рёбер). Найдите в неорграфе максимальный равномерный поток.