SPb HSE, 1 курс, осень 2022/23
Практика по алгоритмам #3

Структуры данных, стек

22 сентября

Собрано 29 сентября 2022 г. в 20:43

Содержание

1.1. Задачи про суммы

Этот блок нужен, чтобы размяться и решить задачу 8, которая пригодится в кучах.

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k}$
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$
5. $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$
6. $\prod\limits_{k=2}^{n} (1 - k^{-2})$
7. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k)$
8. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

1.2. Изучаем STL

Проведём эксперимент.
Подумаем про аллокацию памяти и её перегрузку.

```
queue<int> q;
list<int> l;
deque<int> d;
vector<int> v;
stack<int> s;
queue<int, list<int>> q2;
```

a) Пушбеки в какую структуру будут работать быстро/долго?
b) Как ускорить?
c) У какой из структур есть `operator[]`?

1.3. Структуры данных, стек

1. **Очередь с минимумом, часть 2**

   Поймите код. Что делает, за сколько? Как доказать амортизацию?

```
struct Item { int value, id; };
struct Qmin {
    int q_front, q_back; deque<Item> mins;
    void pop() { if (mins.front().id == q_front++) mins.pop_front(); }
    void push(int x) {
        while (!mins.empty() && mins.back().value >= x) mins.pop_back();
        mins.push_back({x, q_back++});
    }
    int get_min() { return mins.empty() ? INT_MAX : mins.front().value; }
};
```

2. **Амортизация**

   Придумайте потенциал и докажите амортизированное время работы.

   a) Очередь с минимумом через два стека работает за $\mathcal{O}(1)$.
   b) Дек, использующий утроение массива, работает за $\mathcal{O}(1)$.

c) Обычно вектор при `pop_back` память не освобождает. Давайте сделаем, чтобы вектор на n элементах всегда весил $\Theta(n)$. Придумайте. Докажите амортизированное время $\mathcal{O}(1)$, используйте идею с монетками.

3. **Двусвязный список.**

   Придумайте структуру данных.
   Она должна уметь перебирать элементы в обоих направлениях, *если идти с конца*
   но хранить меньше, чем `struct Node { Node *l, *r; int x; }; Node *head, *tail;`.

4. **Частичные суммы**

   Придумайте для каждого пункта структуру данных, которая умеет

   a) Много раз сделать `+=` на отрезке, в конце один раз вывести массив.
   b) Сперва много раз `+=` на отрезке, затем много раз запрос суммы на отрезке.

5. **Оптимальный подотрезок**

   За линейное время найти подотрезок массива.

   a) С максимальной суммой (два решения).
   b) С максимальной суммой, длины от A до B.
   c) С максимальной суммой, содержащий не менее k различных чисел.

6. **Задачи на стек**

   a) В массиве найти для каждого элемента ближайший $\leqslant$ слева за $\mathcal{O}(n)$.
   b) Дан массив. Найти отрезок $[l, r]$: $(\min_{i \in [l..r]} a_i) \cdot (r - l + 1) \to \max$.
   c) Дана матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $\mathcal{O}(n^2)$.

7. `(*)` **Дек и стеки**

   Придумайте дек с минимумом со всеми операциями за $\mathcal{O}(1)$. Докажите время работы.

8. `(*)` **Частичные суммы**

   В каждой целой точке x числовой прямой есть $f[x]$, изначально равная нулю.
   Запросы сперва `+=(l,r)`, затем `sum(l,r)`. Координаты запросов целые от 0 до 10^{18}.

9. `(*)` **Стек и ближайшие**

   a) За один проход со стеком найти ближайшие “$<$” справа и “$\leqslant$” слева.
   b) А теперь **меньший** справа и **меньший** слева.

10. `(*)` **Правильные скобочные подстроки**

    Дана строка s из скобок, а также число k. Для всех i проверить, что подстрока $s[i..i+k]$ является правильной скобочной последовательностью. $\mathcal{O}(n)$.

    a) Скобки только одного типа.
    b) m типов скобок.

11. `(**)` **Стек и 3D**

    Дана матрица из нулей и единиц в 3D. Найти наибольший белый подпараллелепипед.

Разбор задач практики

2.1. Задачи про суммы

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2n.$
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k} = n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1.01}} = 101n.$
3. Сумма нечетных – сумма всех минус сумма четных. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln 2n - \frac{1}{2} \ln n + \Theta(1) = \ln \sqrt{n} + \Theta(1).$
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$
5. $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$
6. $\prod\limits_{k=2}^{n} (1-k^{-2}) = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \cdot \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{(k+1}{k} = \frac{n+1}{2n}$
7. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k) = 2^n \cdot 2^{2 \sum\limits_{k=1}^{n} k} = 2^{n+n(n+1)} = 2^{n(n+2)}$
8. Пусть $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$, тогда $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{2}(S + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}) = \frac{1}{2}(S+2) \Rightarrow S = \frac{1}{2}(S+2) \Rightarrow S = 2.$

   Способ #2: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} =$

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\dots \\
 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\dots \\
 & & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\dots \\
 & & & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\dots \\
 & & & & +\frac{1}{32} & +\dots \\
 & & & & & \dots
\end{array}
$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$$

2.2. Изучаем STL

∘ `vector`, `list`, `deque` – структуры данных. `queue` и `stack` – обёртки над ними.
∘ Дольше всего из трёх структур работает `list<int>`,
т.к. на каждый `push` вызывается `operator new`. Раз в 10 дольше.
∘ У `deque` операции `push` чуть быстрее чем у `vector`.
∘ Чтобы ускорить `list`, нужно задать свой аллокатор.
Самый простой способ – переопределить `operator new`.
∘ Время работы `queue` и `stack` зависит от того, через что они реализованы.
По умолчанию через `deque`.
∘ У дека и вектора есть `operator[]`, у остальных нет.

2.3. Структуры данных, стек

1. **Очередь с минимумом, часть 2**
   ◦ `mins.front()` хранит минимум в очереди и его индекс m_1. После него в `mins` лежит минимум среди элементов очереди с индексами (m_1..`q_back`) и его индекс m_2, и так далее. Элементы `mins` упорядочены по возрастанию и значений, и индексов.
   ◦ Делая `pop`, смотрим, не вынули ли индекс минимума. Если вынули, ничего, после него в `mins` новый минимум.
   ◦ Делая `push`, обновляем минимум во всё бóльшем хвосте очереди, пока новый элемент не больше последнего минимума.
   ◦ Время работы линейно, так как каждый элемент не более одного раза добавлен и удалён из `mins`, других операцицй нет.

   Потенциалом $\varphi = |\texttt{mins}|$.
   $a(\texttt{push}) = t(\texttt{push}) + \Delta\varphi = \mathcal{O}(1)$, сколько вынули, на столько уменьшился φ.
   Заметим, что если явно хранить всю очередь `q`, то можно проверять не индексы, а сами значения. Но данная реализация использует в среднем $\mathcal{O}(\log n)$ памяти на случайных данных.

2. **Амортизация**
   a) **Очередь с минимумом.** $s_{\texttt{push}}$ — стек, куда мы пушим. Пусть $\varphi = |s_{\texttt{push}}|$.
   $a(\texttt{reverse}) = t(\texttt{reverse}) + \Delta\varphi = |s_{\texttt{push}}| + (0 - |s_{\texttt{push}}|) = 0 \Rightarrow a_i = \mathcal{O}(1)$.
   φ всегда неотрицателен.
   b) **Дек.** `capacity` — сколько памяти зарезервировано. Пусть $\varphi = -3\texttt{capacity}$.
   $a(\texttt{rebuild}) = t(\texttt{rebuild}) + \Delta\varphi = 3\texttt{capacity} + 3(\texttt{capacity} - 3\texttt{capacity}) \leqslant 0 \ \Rightarrow a_i = \mathcal{O}(1)$.
   $\varphi_0 - \varphi_n \leqslant 3n$.
   c) **Вектор.** Когда уменьшать память в `pop_back` в 2 раза? Когда элементов в 4 раза меньше.
   За `push_back` кладем 2 монетки: одну себе и одну в первую половину. Тогда хватит монет на копирование при увеличении.
   За `pop_back` кладем 1 монетку в первую четверть. Тогда хватит монет на копирование при уменьшении.

3. **Двусвязный список**
   Храним `sum = (size_t)l ^(size_t)r` вместо `l`, `r`.

   Когда приходим в `v` из `prev`, имеем `next = (Node*)(v->sum ^(size_t)prev)`.

   Новая структура умеет все, что обычный двусвязный список, кроме вставки и удаления из середины за $\mathcal{O}(1)$.

4. **Частичные суммы**
   a) **Много раз сделать += на отрезке, в конце один раз вывести массив.**
   Прибавление на отрезок – это два прибавления на суффикс. К элементу `a[i]` прибавляется все, что прибавлено к суффиксу, начинающемуся с `j < i`. Итого:

Прибавление:	`a[l] += x, a[r+1] -= x`
Восстановление:	`for i: a[i] += a[i-1]`

   b) **Сперва много раз += на отрезке, затем много раз запрос суммы на отрезке.**
   Вычисляем массив, как в предыдущем пункте. Считаем префиксные суммы.
   Ответ на запрос: `pref[r+1] - pref[l]`.

Можно просто два раза подряд вызвать стандартную функцию `partial_sum(a+1, a+n+1, a+1)`, лежит в `<numeric>`.

5. **Оптимальный подотрезок**

a) **С максимальной суммой.**

<u>Способ #1.</u>

```
l = 0, sum = 0, answer = 0;
for (r = 0; r < n; r++):
    if ((sum += a[r]) < 0)
        l = r + 1, sum = 0;
    answer = max(answer, sum);
```

<u>Способ #2.</u>

```
l = 0, r = 0, sum = 0; // [l; r)
while (r <= n)
    if (sum >= 0)
        answer = max(answer, sum += a[r++]);
    else
        answer = max(answer, sum -= a[l++]);
```

Для каждого r ищем отрезок с максимальной суммой, оканчивающийся на r.
Пусть для $r-1$ оптимален отрезок $[l_{r-1}, r-1]$. Тогда для r либо $l_r = l_{r-1}$, либо $l_r = r$. Будь для r оптимально другое начало, оно было бы оптимально и для $r-1$, сумма на этих отрезках отличается на $a[r]$, не зависящее от l.

<u>Способ #3.</u> Найдем частичные суммы `pref[]`. Сумма на отрезке `[l, r]` равна `pref[r + 1] - pref[l]`, при фиксированном `r` нужно минимизировать `pref[l]`. Перебираем `r` в порядке возрастания. Поддерживаем минимум `pref[l]` по всем пройденным `l` $\leqslant$ `r`.

b) **С максимальной суммой, длины от L до R.**
Теперь нас интересует минимум среди `pref[l]` на отрезке $[\mathtt{r} - R, \mathtt{r} - L]$. Поддерживаем очередь с минимумом, на каждом шаге один элемент оттуда уходит, и один приходит.

c) **Содержащий не менее k различных чисел, числа небольшие.**
Теперь нас интересует минимум среди `pref[l]` на отрезке `[0, s-1]`, где `s` – последняя позиция, что `[s, r]` содержит хотя бы k различных чисел.
При увеличении `r` позиция `s` только растет, ее можно продолжать двигать со значения с прошлой итерации, тогда суммарно по всем итерациям выйдет $\mathcal{O}(n)$.
Как проверять, можно ли подвинуть `s` вперед? Поддерживаем массив-счетчик каждого числа.
После `r++` делаем `count[a[r]]++`, перед `s++` делаем `count[a[s]]--`.
Также храним число ненулевых ячеек `count`, меняя его каждый раз, когда только что измененная ячейка начала или перестала быть нулем.
С использованием хеш-таблицы вместо массива можно делать это и для больших чисел.

6. **Задачи на стек**

   a) **Для каждого элемента ближайший меньший слева за $\mathcal{O}(n)$.**

```
for (int i = 0; i < n; ++i) {
    while (!stack.empty() && a[i] <= a[stack.top()]) stack.pop();
    if (!stack.empty()) left[i] = stack.top();
    stack.push(i);
}
```

   В стеке и `left` хранятся индексы элементов.
   Инвариант: для каждого элемента стека перед ним в стеке идет ближайший к нему слева меньший. Когда видим элемент `a[i]`, на вершине стека лежит `a[i - 1]`. Либо он сам меньше `a[i]`, либо нам нужен элемент `a[j] < a[i] <= a[i - 1]` левее, начинаем поиск с ближайшего меньшего к `a[i - 1]`, он как раз дальше по стеку. И так далее.

   b) **Задача:** $(\min_{i \in [l..r]} a_i) \cdot (r - l + 1) \to \max$
   Переберем позицию минимума. Пусть a_i будет минимумом на отрезке. Выгодно расширить его как можно сильнее влево и право, то есть до ближайших $< a_i$ слева и справа.

   c) **Найти наибольший подпрямоугольник из нулей за $\mathcal{O}(n^2)$.**
   Найдем для каждой клетки длину столбика $h[i][j]$ только из нулей, идущего вверх из этой клетки (0, если $a[i][j] == 1$, иначе $h[i-1][j] + 1$).

   Прямоугольник с нижней границей i, левой l и правой r имеет верхнюю границу не более $\min h[i][l..r]$. Переберем нижнюю границу и минимальный столбик прямоугольника $h[i][j]$. Выгодно расширить по максимуму влево и вправо, то есть до ближайших слева и справа элементов $< h[i][j]$.

7. **(*) Дек и стеки**
   Дек через два стека. Если один из стеков кончился, то просто разделим второй пополам на два стека.
   После разделения стека размера $2k$ нам нужно минимум k операций `pop`, чтобы снова нужно было делать разделение. Если класть по монетке за каждый `pop` и `push`, то их хватит на разделение не опустевшего стека.
   Еще можно ввести потенциал: модуль разности размеров стеков.

8. **(*) Частичные суммы, координаты запросов до 10^{18}**
   Отсортируем концы l и $r + 1$ всех запросов по координате. Координаты концов запросов l и $r + 1$ заменим на их позиции в отсортированном порядке. Этот прием называется «сжатие координат». Операции `+=` и восстановление массива делаются так же.
   Надо учесть, что между элементами `i` и `i + 1` на самом деле целый отрезок `[x[i], x[i + 1])`, у всех его элементов значение равно `value[i]`.
   Т.е. `pref[i + 1] = pref[i] + (x[i + 1] - x[i]) * value[i]` $\Rightarrow$ `pref[i] =` $\sum\limits_{z \in [0, x[i])}$ `f[z]`.
   Заметим, что можно отсортировать все запросы и `+=`, и суммы, тогда мы сразу будем знать сжатые координаты запросов суммы. А можно сжать координаты только для `+=`, тогда нужно будет искать бинпоиском позиции концов запросов суммы.

9. **(*) Стек и ближайшие**

```
for (int i = 0; i < n; ++i) {
    while (!stack.empty() && a[i] < a[stack.top()]) right[stack.pop()] = i;
    if (!stack.empty()) left[i] = stack.top();
    stack.push(i);
}
```

Найдем ближайший меньший слева. Либо ближайший $\leqslant$ уже меньше, либо нас интересует уже посчитанный ближайший $<$ к нему.

10. **(*) Правильные скобочные подстроки**

a) **Один тип скобок.**
Считаем баланс скобок (число открывающих минус число закрывающих) на каждом префиксе. Подстрока – правильная, если в ней поровну открывающих и закрывающих скобок, и у нее нет префикса, на котором закрывающих больше, чем открывающих. То есть $(i..i{+}k]$ – хороший, если:

- `balance[`i`] == balance[`$i{+}k$`]`,
- $\forall j \in (i..i{+}k]$ `balance[`j`] >= balance[`i`]`. То есть, минимиальный баланс на отрезке $(i..i{+}k]$ не меньше `balance[`i`]` (точнее, равен).

Поддерживаем значения баланса на отрезке $(i..i{+}k]$ в очереди с минимумом и проверяем два указанных выше условия.

b) **m типов скобок.**
Запустим алгоритм проверки скобочной последовательности на правильность. Если для какой-то скобки нет парной, запомним это. Так же для каждой парной запомним позицию пары. Ответ на запрос $[l, r]$: проверить, что все скобки на $[l, r]$ имеют пару в $[l, r]$. То есть максимальный номер пары скобки из этого отрезка $\leqslant r$, минимальный $\geqslant l$.

11. **(*) Стек и 3D**

Блин как купаца

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(2) Сумма $\frac{k^2}{2^k}$**

   Найдите сумму $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

2. **(1) Максимальное среднее арифметическое**

   Найти подотрезок с максимальным средним арифметическим элементов за $\mathcal{O}(n)$.

3. **(1) Оптимальный отрезок (easy)**

   Найти самый короткий подотрезок, в котором хотя бы k различных чисел. $\mathcal{O}(n)$.

4. **(2) Оптимальный отрезок (medium)**

   Найти подотрезок с максимальной суммой, длины от L до R, содержащий от A до B различных чисел, за $\mathcal{O}(n)$.

5. **(2) Максимизация числа**

   Дано число, представленное n цифрами в d-ичной системе счисления без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно $0 \leqslant k < n$ цифр так, чтобы полученное число из $n-k$ цифр было бы максимальным. Задачу требуется решить за линейное от n время при $d = 10$.
   (+1) за решение за $\mathcal{O}(n)$ для произвольного d.

6. **(2) ПСП-подстрока**

   Найти максимальную по длине подстроку, являющуюся правильной скобочной последовательностью за $\mathcal{O}(n)$. Один тип скобок.
   (+1) за решение, работающее для k типов скобок.
   (+1) посчитать число подстрок, являющихся ПСП (k типов скобок).

3.2. Дополнительная часть

1. **(2) Приключения на окружности**

   Дана окружность и число d. Даны $n \leqslant 10^6$ точек на окружности единичного радиуса. Каждая точка задана углом «радиус-вектора из центра окружности». Для каждой из n точек найти ближайшую в порядке по часовой стрелке на евклидовом расстоянии **не менее** d.

2. **(3) Число прямоугольников**

   Посчитать число подпрямоугольников, состоящих только из нулей, за $\mathcal{O}(n^2)$.

3. **(3) Избавление от амортизации**

   Придумайте, как в очереди с минимумом через два стека победить амортизацию. То есть, придумайте аналогичную структуру данных с временем работы $\mathcal{O}(1)$ в худшем случае на каждую операцию.

   Внимание: задача будет разобрано на лекции, коммитить можно **только** до лекции