

Вопросы к экзамену по алгоритмам

SPb HSE, 2-й курс, октябрь 2021

Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) темы на 3 (оценка 4-5).
- (b) темы на 4 (оценка 6-7).
- (c) темы на 5 (оценка 8-9).
- (+) факультативные темы (оценка 10) – нужно заботать 2 любых темы из 4.

Паросочетания, покраски

- (a) 1. Matching. Определения и сложность задач в двудольном и произвольном графе: паросочетание, вершинное покрытие, независимое множество, совершенное паросочетание.
- (c) 2. Matching. Связь паросочетаний и определителей. Матрица Татта (без док-ва).
Алгоритм поиска собственно паросочетания.
- (a) 3. Matching. Лемма о дополняющем пути.
- (a) 4. Matching. dfs для дополняющего пути, простейший алгоритм за $\mathcal{O}(V(V+E))$.
- (b) 5. Matching. Алгоритм Куна. Доказательство. Сравнение с обычным.
- (b) 6. Matching. Оптимизации алгоритма Куна: не чистить пометки, обнуление пометок за $\mathcal{O}(1)$, жадная инициализация.
- (c) 7. Matching. Оптимизация алгоритма Куна «вообще не чистить пометки». Сравнение с предыдущими оптимизациями. *Связь с жадной инициализацией.*
- (a) 8. Matching. Алгоритм поиска VC и IS за $\mathcal{O}(E)$. Без док-ва.
- (b) 9. Matching. Теорема Кёнига, доказательство корректности алгоритма поиска VC и IS.
- (c) 10. Matching. Применение Куна: вероятностный алгоритм поиска паросочетания в \forall графе.
- (a) 11. Matching. Разбиение вершин орграфа на циклы.
- (b) 12. Matching. Разбиение вершин ациклического орграфа на минимальное число путей. Теорема Дильворта, поиск максимальной антицепи.
- (c) 13. Matching. Классификация рёбер. MAYBE = {рёбра, которые могут лежать в паросочетании}.
- (c) 14. Matching. Классификация рёбер. NO (не могут), MUST (должны).
- (a) 15. Matching. Stable matching (marriage problem). Постановка задачи. Решение. Пример про ЕГЭ.
- (b) 16. Matching. Stable matching. Корректность решения. Реализация за $\mathcal{O}(V+E)$. *Единственность.*
- (a) 17. Matching. Задача о назначениях. Венгерский алгоритм, простейшая реализация за $\mathcal{O}(V^4)$.
- (b) 18. Matching. Оптимизация Венгерского алгоритма до $\mathcal{O}(V^3)$ (потенциалы, быстрый выбор i, j).
- (c) 19. Matching. Оптимизация Венгерского алгоритма до $\mathcal{O}(V \cdot (E+V \log V))$.
Поиск оптимального паросочетания размера ровно k .
- (a) 20. Покраски. Вершинные. Сложность задачи. Брукс.
- (b) 21. Покраски. Вершинные. Жадный практически ценный алгоритм за $\mathcal{O}(E \log V)$.
- (c) 22. Покраски. Вершинные. Планарный граф в 6 цветов за $\mathcal{O}(E \log V)$, в 5 цветов за $\mathcal{O}(VE)$.
- (a) 23. Покраски. Рёберная. Сложность задачи. Теорема Визинга. Связь с паросочетанием.
- (a) 24. Покраски. Рёберная. Двудольный граф. Регулярный за полином. Доказательство.
- (b) 25. Покраски. Рёберная. Двудольный граф. Регулярный за $\mathcal{O}(E^2)$, произвольный за $\mathcal{O}(V^2 D^2)$.
- (c) 26. Покраски. Рёберная. Произвольный двудольный за $\mathcal{O}(E^2)$.

Потоки

- (a) 27. Flow. *Def*: поток, разрез, величина потока, величина разреза, остаточная сеть, циркуляция, прямые и обратные рёбра, декомпозиция потока.
- (a) 28. Flow. Алгоритм Форда-Фалкерсона. Время работы. Без доказательства.
- (b) 29. Flow. Теорема Форда-Фалкерсона. Доказательство.
- (a) 30. Flow. Поиск min разреза по max потоку за $\mathcal{O}(E)$.
- (b) 31. Flow. Эффективное хранение графа (интрузивный список, пары рёбер).
- (a) 32. Flow. Декомпозиция потока на пути за $\mathcal{O}(E^2)$.
- (b) 33. Flow. *Декомпозиция потока* за $\mathcal{O}(VE)$.
- (a) 34. Flow. Решение задачи про k непересекающихся по рёбрам/вершинам путей.
- (a) 35. Flow. Поиск паросочетания через поток за $\mathcal{O}(VE)$.
- (c) 36. Flow. Паросочетание. Связь вершинного покрытия с разрезом. Вершинное покрытие минимального веса.
- (b) 37. Flow. Разности и суммы потоков. Леммы.
- (b) 38. Flow. Алгоритм Эдмондса-Карпа. Существование max потока при $c_e \in \mathbb{R}$. Время работы, часть доказательства.
- (b) 39. Flow. Алгоритм Эдмондса-Карпа. Доказательство леммы про рост расстояний.
- (b) 40. Flow. Алгоритм масштабирования потока. Время работы, доказательство.
- (b) 41. Flow. Алгоритм Диница. Время работы, доказательство.
- (c) 42. Flow. Алгоритм Диница с масштабированием. Время работы, доказательство.
- (c) 43. Flow. Алгоритм Диница с *link-cut-tree*. Время работы, доказательство.
- (c) 44. Flow. Алгоритм Хопкрофта-Карпа поиска паросочетаний.
- (c) 45. Flow. 1-я теорема Карзанова $\mathcal{O}(\sqrt{C})$.
- (c) 46. Flow. 2-я теорема Карзанова $\mathcal{O}(U^{1/3}V^{2/3})$.
- (b) 47. Flow. $[L, R]$ -циркуляция за $\mathcal{O}(flow)$.
- (b) 48. Flow. $[L, R]$ -flow, $[L, R]$ -max-flow за $\mathcal{O}(flow)$.
- (a) 49. Flow. Глобальный разрез: базовое решение за $\mathcal{O}(V \cdot flow)$.
- (b) 50. Flow. Глобальный разрез: алгоритм Штор-Вагнера без доказательства.
- (b) 51. Flow. Глобальный разрез: алгоритм Каргера-Штейна за $\mathcal{O}(V^4)$.
- (c) 52. Flow. Глобальный разрез: алгоритм Каргера-Штейна за $\mathcal{O}(V^2 \log^2 V)$.
- (a) 53. Flow. Задачи mincost k -flow, mincost max flow, mincost circulation. Сведения друг к другу.
- (a) 54. Flow. Алгоритм для поиска mincost k -flow в графе без отрицательных циклов за $\mathcal{O}(k \cdot \text{FordBellman})$. Доказательство.
- (a) 55. Flow. *Транспортная задача*. Формулировка с $\forall c_e$ и $c_e = +\infty$. Решение.
- (a) 56. Flow. Критерий оптимальности mincost k -flow. Доказательство.
- (b) 57. Flow. Mincost k -flow в графе без отрицательных циклов за $\mathcal{O}(\text{FordBellman} + k \cdot \text{Dijkstra})$. Доказательство.
- (a) 58. Flow. Графы с отрицательными циклами. Алгоритм Клейна.
- (b) 59. Flow. ММСС. Алгоритм, оценка времени работы без доказательства.
- (c) 60. Flow. Capacity Scaling за $\mathcal{O}(E \cdot \text{Dijkstra} \cdot \log U)$.

Строки и хеширование

- (a) 61. String. Префикс функция. КМП для поиска подстроки. Поиск периода в строке.
- (a) 62. String. LCP за $\mathcal{O}(n^2)$.
- (b) 63. String. Z-функция. Поиск подстроки в строке и периода строки.
- (c) 64. String. Алгоритмы Боэра-Мура поиска подстроки в строке за сублинейное время.
- (a) 65. String. Хеши. Полиномиальный хеш, хеш подстроки за $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(1) \rangle$.
- (a) 66. String. Алгоритм Рабина-Карпа поиска подстроки в строке с $\mathcal{O}(1)$ доппамяти.
- (a) 67. String. Хеши. Общие слова про хеширование. RP и ZPP версии Рабина-Карпа.
- (b) 68. String. Хеши. Каким хешом пользоваться и почему? Связь с корнями многочленов, оценка $\frac{|s|}{M}$.
- (c) 69. String. Хеши. Вероятности. Три леммы. Обоснование вероятности коллизии в худшем и в среднем. Применение для Рабина-Карпа, количества различных подстрок.
- (c) 70. String. Хеши. Антихеш тесты. Строка Туэ-Морса.
- (a) 71. String. Хеши. Наибольшая общая подстрока за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- (b) 72. String. Хеши. Поиск LCP и построение суффмассива за $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.
- (b) 73. String. *Поиск в тексте с одной ошибкой.*
- (c) 74. String. Хеши. *Поиск в словаре с одной ошибкой.*
- (c) 75. String. Палиндромы. Подсчет числа за $\mathcal{O}(n \log n)$, самый длинный за $\mathcal{O}(n)$.
- (c) 76. String. *Палиндромы. Алгоритм Манакера.*
- (a) 77. String. Суффмассив: построение за $\mathcal{O}(n^2)$ и $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ цифровой сортировкой.
- (b) 78. String. Суффмассив: **эффективное** построение за $\mathcal{O}(n \log n)$ цифровой сортировкой.
- (a) 79. String. Суффмассив: поиск подстроки в тексте за $\mathcal{O}(|s| \cdot \log |text|)$.
- (b) 80. String. Суффмассив: алгоритм Касаи за $\mathcal{O}(n)$, $\forall i, j$ $LCP(i, j)$ за $\mathcal{O}(1)$.
- (c) 81. String. Суффмассив: поиск строки в тексте за $\mathcal{O}(|s| + \log |text|)$. Сам алгоритм.
- (c) 82. String. Суффмассив: поиск строки в тексте за $\mathcal{O}(|s| + \log |text|)$. Оценка времени.
- (a) 83. String. *Решение задач суффмассивом: поиск общей подстроки двух строк.*
- (b) 84. String. *Решение задач суффмассивом: LZSS.*
- (a) 85. String. Бор, хранение, map, unordered_map, сортировка строк.
- (a) 86. String. Бор, сжатый бор. Построение суффдерева за $\mathcal{O}(n^2)$. Подстрока в тексте суфф.деревом.

Бонус

- (+) 87. Потоки через push-relabel. Алгоритм за $\mathcal{O}(V^3)$.
Доказательство корректности и времени работы.
- (+) 88. Потоки через push-relabel. Без доказательств.
Оптимизация global relabeling и алгоритм Ahuja за $\mathcal{O}(VE + V^2 \log U)$.
- (+) 89. Mincost flow техникой mincost scaling.
- (+) 90. Суффмассив за $\mathcal{O}(n)$: Каркайнен-Сандерс.