SPb HSE, 1 курс, осень 2021/22
Практика по алгоритмам #1

Асимптотика и рекуррентные соотношения

3 сентября

Собрано 3 сентября 2021 г. в 16:52

Содержание

Асимптотика и рекуррентные соотношения

1. **Простые задачи на асимптотику**

   Найдите короткую запись через Θ.
   Если такой не существует, объяснить, почему, и записать через $\mathcal{O}$.

   a) $2n$
   b) $2n + 1$
   c) $n^2 + 5n + 1$
   d) $\frac{n^2+3}{7n+1}$
   e) $n(2 + \sin n)$
   f) $\frac{\operatorname{arctg} n}{n} + \frac{\log\log n}{\log n}$
   g) $\sqrt{\frac{n}{\log n} + \frac{7\log n}{n}} + n^{1/3}$
   h) Докажите: $\forall f, g > 0\colon f + g = \Theta(\max(f, g))$
   i) $\frac{P(n)}{Q(n)}$

2. **Истина или ложь?**

   Проверьте корректность, докажите.

   a) $2^{n+3} = \Theta(2^n)$
   b) $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$
   c) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = \mathcal{O}(2^{f(n)})$
   d) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = o(2^{f(n)})$
   e) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = \mathcal{O}(\log f(n))$
   f) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = o(\log f(n))$
   g) $f(n) + g(n) = \Theta(\frac{f(n)+g(n)}{2})$
   h) $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$
   i) $\frac{n}{\log n} = \omega(\log n)$ (А если Ω?)
   j) $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n)$
   k) $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = \mathcal{O}((\log n)^n)$

3. **Рекуррентность**

   a) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$
   b) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$
   c) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n$
   d) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n$
   e) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n$
   f) $T(n) = T(n-1) + T(n-1) + 1$
   g) $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 1$

4. **Дополнительные задачи**

   Найдите короткую запись через Θ.
   Если $\nexists$, то объяснить почему, и записать через O.

   a) $f(n) = n(1 + \sin n)$
   b) То же для $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$
   c) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$
   d) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$
   e) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + 1$
   f) $T(n) = T(\frac{n}{\log n}) + \log n$
   g) $T(n) = T(n-1) + T(\sqrt{n})$

Разбор задач практики

1. **Простые задачи на асимптотику**

   a) $2n = \Theta(n)$, по определению :)

   b) $n \leqslant 2n+1 \leqslant 2n+n = 3n \Rightarrow 2n+1 = \Theta(n)$.

   c) $n^2 \leqslant n^2+5n+1 \leqslant n^2+5n^2+n^2 = 7n^2 \Rightarrow n^2+5n+1 = \Theta(n^2)$.

   d) $\frac{n^2}{7n+n} \leqslant \frac{n^2+3}{7n+1} \leqslant \frac{n^2+n^2}{7n} \Rightarrow \frac{1}{8}n \leqslant \frac{n^2+3}{7n+1} \leqslant \frac{2}{7}n \Rightarrow \frac{n^2+3}{7n+1} = \Theta(n)$.

   Способ #2: $\frac{n^2}{7n+1} = \frac{1}{7}n - \frac{1}{49} + \frac{1/49}{7n+1} = \Theta(n) + o(1) = \Theta(n)$.

   e) $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1 \Rightarrow n \leqslant n(2+\sin n) \leqslant 3n \Rightarrow n(2+\sin n) = \Theta(n)$.

   f) $\operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2} < \log\log n,\ n > \log n \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg} n}{n} + \frac{\log\log n}{\log n} \leqslant 2\frac{\log\log n}{\log n} \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg} n}{n} + \frac{\log\log n}{\log n} = \Theta(\frac{\log\log n}{\log n})$.

   g) $\sqrt{\frac{n}{\log n} + \frac{7\log n}{n}} + n^{1/3} = \Theta(\sqrt{\frac{n}{\log n}})$.

   h) $\max(f(n), g(n)) \leqslant f(n) + g(n) \leqslant 2\max(f(n), g(n))$.

   i) $\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\Theta(n^{\deg P})}{\Theta(n^{\deg Q})} = \Theta(n^{\deg P - \deg Q})$.
   Стоит формально доказать, что $\frac{\Theta(f)}{\Theta(g)} = \Theta(\frac{f}{g})$.
   Пусть $C_1 f \leqslant \Theta(f) \leqslant C_2 f,\ C_1' g \leqslant \Theta(g) \leqslant C_2' g$, тогда $\frac{C_1 f}{C_2' g} \leqslant \frac{\Theta(f)}{\Theta(g)} \leqslant \frac{C_2 f}{C_1' g}$.

2. **Истина или ложь?**

   a) $2^{n+3} = \Theta(2^n)$.
   Верно: $2^{n+3} = 8 \cdot 2^n = \Theta(2^n)$.

   b) $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$.
   Неверно: $2^{2n+1} \leqslant c \cdot 2^n \Rightarrow 2^{n+1} \leqslant c \Rightarrow n \leqslant \log c - 1$, ложь для достаточно больших n.

   c) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = \mathcal{O}(2^{f(n)})$.
   Неверно, возьмём $g(n) = 2n+1,\ f(n) = n$, получим предыдущий пункт.

   d) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = o(2^{f(n)})$. Верно при $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

   При достаточно больших n $g(n) < 0.9f(n) = f(n) - 0.1f(n) \Rightarrow 2^{g(n)} < 2^{f(n)} \cdot 2^{-0.1f(n)}$.

   Для любой $C \geqslant 2^{-0.1f(n)}$ верно $2^{g(n)} < C \cdot 2^{f(n)}$. Раз $f(n) \to \infty$, получили $\forall C$.

   Способ #2 (через пределы): $g(n) = o(f(n)) \Leftrightarrow \frac{g(n)}{f(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   $\frac{2^{g(n)}}{2^{f(n)}} = 2^{g(n)-f(n)}$, а $g(n) - f(n) = f(n)\left(\frac{g(n)}{f(n)} - 1\right) \leqslant -0.9f(n)$ при больших n.

   $2^{g(n)-f(n)} \leqslant \frac{1}{2^{0.9f(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   e) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = \mathcal{O}(\log f(n))$.
   Верно при $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (а также для $f(n)$: $\underline{\lim}\, f(n) > 0$).

   $\exists c\ g(n) < cf(n) \Rightarrow \log g(n) < \log c + \log f(n) \Rightarrow \log g(n) < 1.1 \cdot \log f(n)$.

f) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = o(\log f(n))$.
Неверно, возьмем $g(n) = n, f(n) = n^2$.

g) $f(n) + g(n) = \Theta(\frac{f(n)+g(n)}{2})$, верно по определению.

h) $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$.
Верно, доказано на лекции.

i) $\frac{n}{\log n} = \omega(\log n) \Leftrightarrow \log n = o(\frac{n}{\log n})$.
Верно: $\forall c \ \log n < c\frac{n}{\log n} \Leftrightarrow \log^2 n < cn \Leftrightarrow \log^2 n = o(n)$, верно из лекции.

Если уж ω, то Ω тем более.

j) $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n)$.
Неверно: $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n) \Rightarrow \frac{n}{\log n} > cn \Rightarrow \log n < \frac{1}{c}$, ложь для достаточно больших n.

k) $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = \mathcal{O}((\log n)^n)$.
Сравним логарифмы.
$\log(\sqrt{n}^{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2}\sqrt{n}\log n$.
$\log((\log n)^n) = n \log\log n$.
$\log n = o(\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{n}\log n = o(n) = o(n\log\log n)$, по пункту (d) $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = o((\log n)^n) = \mathcal{O}((\log n)^n)$.

3. **Реккурентность**

a) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 = 1 + 2(1 + 2T(\frac{n}{4})) = 1 + 2 + 4(1 + 2T(\frac{n}{8})) = \ldots = 1 + 2 + \ldots + 2^{\lceil \log n \rceil} = 2^{\lceil \log n \rceil + 1} - 1 = \Theta(n)$.

Способ #2 (по теореме): $a = 2, b = 2, c = 0 < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$.

b) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2 = n^2 + 3(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 3T(\frac{n}{4})) = n^2 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{9}{16}n^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} n^2 \leqslant n^2 \sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^i = n^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4n^2 \Rightarrow n^2 \leqslant T(n) \leqslant 4n^2 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$.

Способ #2 (по теореме): $a = 3, b = 2, c = 2 > \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c) = \Theta(n^2)$.

c) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n = n + 5(\frac{n}{2} + 5T(\frac{n}{4})) = n + \frac{5}{2}n + \frac{25}{4}n + \ldots + \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_2 n} n = n\frac{2.5^{\log_2 n + 1} - 1}{2.5 - 1} = \Theta(2.5^{\log_2 n} n) = \Theta(n^{\log_2(2.5)+1}) = \Theta(n^{\log_2 5})$.

Способ #2 (по теореме): $a = 5, b = 2, c = 1 < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 5})$.

d) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n = n\log n + 2(\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + 2T(\frac{n}{4})) = n\log n + n\log\frac{n}{2} + \ldots + n = n(\log n + (\log n - 1) + (\log n - 2) + \ldots + 1) = \Theta(n\log^2 n)$.

Способ #2 (по обобщенной теореме): $a = 2, b = 2, f(n) = \Theta(n^1 \log^1 n), c = \log_b a = 1, d = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log^{d+1} n) = \Theta(n\log^2 n)$.

e) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n = n + 3(\frac{n}{3} + 3T(\frac{n}{9})) = n + \frac{3}{3}n + \frac{9}{9}n + \ldots = \sum\limits_{i=0}^{\log_3 n} n = \Theta(n\log n)$.

Способ #2 (по теореме): $a = 3, b = 3, c = 1 = \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log n) = \Theta(n\log n)$.

f) $T(n) = T(n-1) + T(n-1) + 1 = 1 + 2(1 + 2T(n-2)) = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = \Theta(2^n)$.

Можно доказать это и по индукции, посмотрев на первые несколько членов.

g) Рассмотрим $a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. По индукции можно доказать, что $a_n = 2^n$. Если представить $T(n)$ как функцию, которая внутри себя один раз вызывает $T(n-1)$ и два раза $T(n-2)$, а $T(0)$ и $T(1)$ ничего не вызывают, то $T(n)$ равно количеству вершин в дереве вызовов функции T. Несложно заметить, что a_n асимптотически равно количеству листов в таком дереве ($T(0)$ дает вклад 1, $T(1)$ дает вклад 2). А количество всех вершин в троичном дереве отличается от количества листьев не более чем в 2 раза. Таким образом, $T(n) = \Theta(2^n)$.

4. **Дополнительные задачи**

a) $f(n) = n(1 + \sin n)$.
$f(n) < 2n = \mathcal{O}(n)$, но $f(n) \neq \Theta(n)$. Говоря грубо, $(1 + \sin n)$ бесконечно часто будет опускаться почти до нуля.

Формально нужно $\forall C, N \quad \exists n > N \colon n(1 + \sin n) < Cn$. Покажем более сильное утверждение $\forall N, \varepsilon > 0, y \in [-1..1] \quad \exists n > N \colon |y - \sin n| < \varepsilon$.

Пусть $x = \arcsin y$, хотим найти n с синусом, близким к $\sin x$. Для этого достаточно, чтобы $(n \bmod 2\pi)$ было близко к x: $|\sin n - \sin x| \leqslant |(n \bmod 2\pi) - x|$.

π иррационально $\Rightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \colon (i \bmod 2\pi) \neq (j \bmod 2\pi)$. Рассмотрим первые m натуральных чисел, у них разные остатки по модулю 2π, то есть, им соответствуют разные точки на единичной окружности.

Есть точки i, j на расстоянии $\leqslant \frac{2\pi}{m}$. Взяв $m = \lceil \frac{2\pi}{\varepsilon} \rceil$, получим, что сделав $t = |j - i|$ шагов, мы смещаемся по окружности на $\leqslant \varepsilon$. Тогда, ходя с шагом t, можно попасть в ε-окрестность любой точки на окружности.

Чтобы попасть в окрестность x после N, берем $k = \lfloor \frac{x - \sin N}{t} \rfloor$ и $n = N + kt$.

b) $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$. Никак особо не упростить.
Надо только понимать, что $\forall C > 0 \ \log^C n = o(2^{\sqrt{\log n}})$ и $2^{\sqrt{\log n}} = o(n^C)$.

c) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$.
$T(n) = 1 + T(\frac{n}{2}) = 1 + 1 + T(\frac{n}{4}) = \ldots = \log n$.

Способ #2 (по теореме): $a = 1, b = 2, c = 0 = \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log n) = \Theta(\log n)$.

d) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$.
$T(n) = n + T(\frac{n}{2}) = n + \frac{n}{2} + T(\frac{n}{4}) = \ldots = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + 1 \approx 2n = \Theta(n)$.

Способ #2 (по теореме): $a = 1, b = 2, c = 1 > \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c) = \Theta(n)$.

e) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + 1$.
Сначала откинем единичку. Без единички $T(n)$ будет пропорционально числу листьев дерева рекурсии, а с ней – числу всех вершин. Поскольку дерево двоичное, это даст отличие только в два раза.

Видно, что $\Omega(n^{\log_3 2}) < T(n) < \mathcal{O}(n)$. Предположим, что $T(n) = n^\alpha$, тогда:
$n^\alpha = (\frac{n}{2})^\alpha + (\frac{n}{3})^\alpha \Leftrightarrow 1 = (\frac{1}{2})^\alpha + (\frac{1}{3})^\alpha$.
При $\alpha = 0$ правая часть равна $2 > 1$, при очень больших α правая часть почти $0 < 1$, так что график правой части где-то пересечет единицу, у уравнения есть решение. Обычно такие уравнения решают не аналитически, а приближённо, например, бинпоиском.

Способ #2. Пусть $T(n) = S(\log n)$, тогда $S(n) = S(n-1) + S(n - \log 3) + 1$, пользуемся теоремой «об экспоненциальных рекуррентных соотношениях».

f) $T(n) = T(\frac{n}{\log n}) + \log n$.
Грубая прикидка: на каждом уровне $\approx \log n$, уровней $\approx \log_{\log n} n = \frac{\log n}{\log \log n}$, итого $\Theta(\frac{\log^2 n}{\log \log n})$.

Докажем $T(n) = \Omega(\frac{\log^2 n}{\log \log n})$. Пока n не дойдет до $\sqrt{n}$, $\log n$ будет неизменным с точностью до константы, а уровней рекурсии надо потратить не менее $\log_{\log n}\sqrt{n} = \Omega(\frac{\log n}{\log\log n})$.

Теперь докажем $\mathcal{O}(\frac{\log^2 n}{\log\log n})$. Для этого заметим, что $\forall n$ при переходе от n до $\sqrt{n}$ у нас будет не более $\log_{\log\sqrt{n}}(n/\sqrt{n})$ слагаемых, каждое из которых не более $\log n$.
Сумма всех этих слагаемых не больше $X(n) = C\frac{\log^2 n}{\log\log n}$.
Осталось сложить переходы $n \longrightarrow n^{1/2} \longrightarrow n^{1/4} \longrightarrow \dots$.
$X(n) + X(n^{1/2}) + X(n^{1/4}) + \ldots \leqslant X(n) + \frac{1}{2}X(n) + \frac{1}{4}X(n) = \Theta(X(n)) = \mathcal{O}(\frac{\log^2 n}{\log\log n})$.

g) $T(n) = T(n-1) + T(\sqrt{n})$.
Будем искать $T(n)$ в виде n^a, тогда получаем, что $(n^a)' \approx n^{\frac{a}{2}} \Rightarrow a - 1 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2$. Докажем по индукции оценку сверху n^2: $T(n-1) + T(\sqrt{n}) \leqslant (n-1)^2 + n < n^2$.

Далее можно уточнить асимптотику и получить $\frac{n^2}{\log n}$.
$\Omega(\frac{n^2}{\log n})$ показывается прямой подстановкой.
$\mathcal{O}(\frac{n^2}{\log n})$ показать сложно, зато можно показать $\mathcal{O}(\frac{n^2}{\log^{1-\varepsilon} n})$ для сколь угодно малого ε.

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(2.0) Истина или ложь?**, **(0.5)** за каждый пункт
   Проверьте корректность, докажите.
   l) $n^{\log n} = \mathcal{O}(1.1^n)$
   m) $\frac{n^3}{n^2+n\log n} = \mathcal{O}(n \log n)$
   n) $\forall f\colon f(n) = \mathcal{O}(f(\frac{n}{2}))$
   o) $\log n! = \Theta(n \log n)$

   p.s. использовать формулу стирлинга в этой домашке нельзя.

2. **(2.5) Рекуррентность**, **(0.5)** за каждый пункт
   Во всех задачах предполагается, что $\forall x \leqslant 1, T(x) = 1$
   g) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n$
   h) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n\log^2 n$
   i) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + 1$
   j) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$
   k) $T(n) = T(n-1) + n$

3. **(3) Заполнить табличку**
   $A = O(B)$? $A = o(B)$? и т.д. За каждый неправильный ответ **(-0.2)** балла (15 ошибок $\to$ 0).

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\log^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

4. **(6) Упорядочить 30 функций в порядке возрастания**
   Если какие-то функции равны ($f = \Theta(g)$), указать это. Здесь $\log n$ — двоичный логарифм, $\ln n$ — натуральный логарифм. За каждый неверный ответ **(-0.4)** балла (15 ошибок $\to$ 0).

$\log(\log^* n)$	$2^{\log^* n}$	$(\sqrt{n})^{\log n}$	n^2	$n!$	$(\log n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\log^2 n$	$\log n!$	2^{2^n}	$n^{1/\log n}$
$\ln \ln n$	$\log^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\log \log n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\log n)^{\log n}$	e^n	$4^{\log n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\log n}$
$\log^* \log n$	$2^{\sqrt{2 \log n}}$	n	2^n	$n \log n$	$2^{2^{n+1}}$

   Примечание: $\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \leq 1; \\ 1 + \log^*(\log n) & \text{иначе} \end{cases}$

5. **(1) Посчитать точно**, **(0.5)** за каждый пункт
   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

3.2. Дополнительная часть

1. **(1) Истина или ложь?**, **(0.5)** за каждый пункт
   Проверьте корректность, докажите.
   q) $n^n = \mathcal{O}(n!)$
   r) $n \log n - \log n! = \Theta(n)$

2. **(1.5) Рекуррентность**, **(0.5)** за каждый пункт
   Во всех задачах предполагается, что $\forall x \leqslant 1, T(x) = 1$.
   l) $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$
   m) $T(n) = T(n-1) + T(n-3)$
   n) $T(n) = T(\frac{n}{2}) \cdot T(\frac{n}{3})$, при этом $\forall x \leqslant 3$ $T(x) = 2$

3. **(1) Реккурентность и практика**
   Дайте наиболее точный ответ, докажите наиболее точные верхние и нижние оценки для $T(n) = T(n-1) + T(n^{1/3})$.