

# Вопросы к экзамену по алгоритмам SPb HSE, 1-й курс, декабрь 2021

## Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) темы на 3 (оценка 4-5).
- (b) темы на 4 (оценка 6-7).
- (c) темы на 5 (оценка 8-9).
- (+) факультативные темы (оценка 10) – **нужно заботать 3 любых темы из 5.**

## Кучи

- (a) 1. Неар. Биномиальные деревья. Определение, размер, глубина.
- (b) 2. Неар. Биномиальные куча: операции `add`, `extractMin`, `merge`.
- (c) 3. Неар. Улучшение биномиальной: `merge` и `add` за  $\mathcal{O}(1)$ .
- (b) 4. Неар. Фибоначчиева куча: отличие от биномиальной, описание операции `decreaseKey`.
- (c) 5. Неар. Фибоначчиева куча: потенциал, амортизированное время работы `decreaseKey`.
- (c) 6. Неар. Фибоначчиева куча: лемма про размер дерева ранга  $k$ .
- (c) 7. Неар. *Фибоначчиева куча: худший случай для `add`, `merge`, `decKey`, `extMin`.*
- (b) 8. Неар. *Ленивое добавление: `build` за  $\mathcal{O}(n)$ , `merge` за  $\mathcal{O}(\log n) \rightarrow$  `add` за  $\mathcal{O}(1)$ .*
- (c) 9. Неар. *Brodal's heap: `add` за  $\mathcal{O}(1) \rightarrow$  `merge` за  $\mathcal{O}(1)$ .*

## Динамика база

- (a) 10. DP. На примере задачи «калькулятор»: вперёд, назад, `relax`.
- (a) 11. DP. На примере задачи «калькулятор»: ленивая динамика, плюсы и минусы, `map`.
- (a) 12. DP. Восстановление ответа. Ссылки назад. На примере задачи «путь на матрице».
- (b) 13. DP. Восстановление ответа без ссылок назад. На примере задачи «путь на матрице».
- (a) 14. DP. Граф состояний. Вперёд, назад, ленивая на языке графа состояний.
- (a) 15. DP. На примере «калькулятор»: `checklist` (6 пунктов), что должно быть в решении динамикой.
- (a) 16. DP. Рюкзак без стоимостей.
- (b) 17. DP. Рюкзак с стоимостями.
- (b) 18. DP. Рюкзак + `bitset`.
- (c) 19. DP. Рюкзак. Восстановление ответа с линейной памятью.
- (a) 20. DP. Квадратные: НВП.
- (a) 21. DP. Квадратные: НОП.
- (b) 22. DP. Квадратные: Левенштейн.
- (a) 23. DP. *НОВП.  $\mathcal{O}(n^4)$ .*
- (b) 24. DP. *НОВП.  $\mathcal{O}(n^3)$ .*
- (c) 25. DP. *НОВП.  $\mathcal{O}(n^2)$ .*
- (a) 26. DP. *Разбиение строки на палиндромы.*
- (b) 27. DP. Хиршберг. Применение для НОП. Без времени работы.
- (c) 28. DP. Хиршберг. Применение для НОП, Левенштейна. Время работы.
- (c) 29. DP. Улучшенный Хиршберг, применение для рюкзака с весами.

- (b) 30. DP. bitset. Что умеет? За сколько? Как устроен? Перебор единичных бит.

### Динамика задачи, идеи

- (b) 31. DP. Игра в камни. Несимметричная  $win[n, whoMoves]$ .
- (b) 32. DP. Игра в камни. Симметричная  $win[n]$ .
- (a) 33. DP. По дереву. Размер поддеревьев.
- (b) 34. DP. По дереву. Паросочетание минимального веса.
- (c) 35. DP. По дереву. Связное поддерево размера  $k$  минимального веса.
- (b) 36. DP. Разбиения числа  $n$  на неупорядоченные слагаемые.
- (b) 37. DP. Разбиения числа  $n$  на ровно  $k$  неупорядоченных слагаемых.
- (b) 38. DP. Проверка «подходит ли под шаблон». Линия памяти.
- (b) 39. DP. НВП за  $\mathcal{O}(n \log n)$  (только длина).
- (c) 40. DP. НВП за  $\mathcal{O}(n \log n)$  (восстановление ответа).
- (a) 41. DP. По подотрезкам. Задача «погрузка на корабль». Решение за  $\mathcal{O}(n^4)$ .
- (b) 42. DP. Измельчение перехода на примере задачи «погрузка на корабль».  $\mathcal{O}(n^3)$ .
- (c) 43. DP. Использование пары в функции на примере задачи «погрузка на корабль».  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- (a) 44. DP. Рекуррентные соотношения за  $\mathcal{O}(k^3 \log n)$ .
- (b) 45. DP. Пути в графе за  $\mathcal{O}(kn^2)$  и  $\mathcal{O}(n^3 \log k)$ .
- (a) 46. DP. Задача «почтовые отделения». Решение за  $\mathcal{O}(n^4 + n^2k)$ .
- (b) 47. DP. Задача «почтовые отделения». Использование частичных сумм для вычисления функции на отрезке за  $\mathcal{O}(1)$  с предподсчетом  $\mathcal{O}(n)$ . Решение за  $\mathcal{O}(n^2k)$ .
- (b) 48. DP. Оптимизации. Кнут.  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- (c) 49. DP. Оптимизации. Разделяй и властвуй.  $\mathcal{O}(nk \log n)$ .
- (a) 50. DP. Стресс-тестирование для проверки гипотез на примере «почтовые отделения».
- (a) 51. DP. По подотрезкам. Оптимальное умножение матриц.  $\mathcal{O}(n^3)$ .
- (a) 52. DP. Комбинаторика. Перестановка по номеру.
- (a) 53. DP. Комбинаторика. Номер по перестановке.
- (b) 54. DP. Комбинаторика. Скобочная последовательность по номеру.
- (b) 55. DP. Комбинаторика. Номер по скобочной последовательности.
- (c) 56. DP. Комбинаторика. Следующий лексикографически. 2 примера.
- (c) 57. DP. Комбинаторика. Количество чисел на отрезке  $[L, R]$  кратных  $t$  за  $\mathcal{O}(m \log R)$ .

### Динамика по подмножествам

- (a) 58. DP. Представление множеств масками бит. 10 операций за  $\mathcal{O}(1)$ .
- (a) 59. DP. Число бит (элементов) и сумма в множестве.
- (a) 60. Рекурсия. Число бит (элементов) в множестве рекурсией.
- (a) 61. DP. Гамильтонов путь за  $\mathcal{O}(2^n n^2)$ .
- (b) 62. DP. Гамильтонов путь за  $\mathcal{O}(2^n n)$  времени и  $\mathcal{O}(2^n)$  памяти.
- (b) 63. DP. Гамильтонов цикл.
- (a) 64. DP. Перебор всех подмножеств. Два доказательства  $3^n$ .
- (b) 65. DP. Перебор всех надмножеств.
- (a) 66. DP. Вершинная покраска за  $\mathcal{O}(4^n)$ . Связь с независимыми множествами.
- (a) 67. DP. Вершинная покраска за  $\mathcal{O}(3^n)$ .
- (b) 68. DP. Вершинная покраска за  $\mathcal{O}(2.44^n)$ . Общий алгоритм, время работы  $2.44^n$ .

- (c) 69. DP. Способ перебора и обоснование количества максимальных по включению независимых подмножеств. Пример, на котором оценка достигается.
- (b) 70. DP. Предподсчёт независимости всех подмножеств за  $\mathcal{O}(2^n)$ .
- (c) 71. DP. Количество независимых подмножеств для каждого множества за  $\mathcal{O}(2^n)$ .
- (b) 72. DP. Развёрнутая битовая запись.
- (a) 73. DP. Биты. Степень двойки? Номер старшего бита?
- (b) 74. DP. Биты. Номер младшего бита за  $\mathcal{O}(1)$ .
- (c) 75. DP. Биты. Чётность количества бит. Количество бит.
- (b) 76. DP. SetCover.  $\mathcal{O}^*(2^{\min(n,m)})$ .
- (b) 77. DP. Перевозка грузов за  $\mathcal{O}^*(3^n)$ .
- (c) 78. DP. Перевозка грузов за  $\mathcal{O}(2^n n)$ .
- (c) 79. DP. Количество паросочетаний за  $\mathcal{O}(2^n n)$ .
- (c) 80. DP. Йатс.  $\forall A$  сумма по всем подмножествам  $A$  за  $\mathcal{O}(2^n n)$ .
- (a) 81. DP. Lazy. Количество клик рекурсивным перебором за  $\mathcal{O}(2^{n/2})$ .
- (b) 82. DP. Lazy. Количество клик рекурсивным перебором: обоснование времени работы  $\mathcal{O}(2^{n/2})$ .
- (a) 83. DP. Lazy. Перебор для замощения доминошками за  $\mathcal{O}(2^{wh/2})$ .
- (b) 84. DP. Lazy. Динамика для замощения доминошками, оценка  $\mathcal{O}(hw2^{\min(h,w)})$  числа состояний.
- (c) 85. DP. Lazy. Оптимизация константы рекурсивной версии. Нерекурсивная версия.
- (a) 86. Meet-In-The-Middle. Для игры «из исходной перестановки за 40 ходов получи нужную».
- (a) 87. Meet-In-The-Middle. Для рюкзака без стоимостей.
- (b) 88. Meet-In-The-Middle. Для рюкзака со стоимостями.
- (c) 89. Meet-In-The-Middle. Для количества клик за  $\mathcal{O}(2^{n/2} n^2)$ .
- (c) 90. Meet-In-The-Middle. Для количества клик за ровно  $\mathcal{O}(2^{n/2})$ .

## Бонус

- (+) 91. DP. Кнут. Обоснование в задаче «почтовые отделения».
- (+) 92. DP. Лямбда. Примеры задач.
- (+) 93. DP. Slope trick. Примеры задач.
- (+) 94. DP. Решение  $k$ -subsetsum (выбрать ровно  $k$  предметов с суммой ровно  $S$ ) за  $\mathcal{O}(\sqrt{kn}S)$ .
- (+) 95. ФВИ. Количество гамильтоновых путей, вершинные покраски за  $\mathcal{O}^*(2^n)$ .