

# Вопросы к экзамену по алгоритмам

## СПб ВШЭ, третий курс, 2018/19 учебный год

---

### Многочлены

1. Действия над  $\mathbb{F}_2$ :  $\pm$ , mul, div, gcd.
2. Умножение над кольцом, над  $\mathbb{F}_2$  за  $(n/w)^{\log 3}$ , над полем, над  $\mathbb{R}$ , над  $\mathbb{C}$ .
3. Деление через разделяй и властвуй. Над кольцом, над  $\mathbb{R}$ .
4. Обращение ряда. Деление за  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
5. FFT. Рекурсивно, нерекурсивно, два вещественных в одном комплексном.
6. Разделяй и властвуй: значения в точках, интерполяция, перевод из 2-ой в 10-ую.
7. Вычисление  $n! \bmod m$ , факторизация за  $\mathcal{O}^*(n^{1/4})$ .
8. Задачи: число счастливых билетов; CRC-32, вычисление от  $A$ ,  $A \text{ xor } B$ ,  $A1$ .
9. Коды для исправления 1-й ошибки ( $2n$ ,  $n + \log n$ ),  $k$  ошибок (Рид-Соломон).
10. Вычисление линейной рекурренты за  $\mathcal{O}(k^3 \log n)$ ,  $\mathcal{O}(k \log k \log n)$ .

### Автоматы

11. Def: (не)детерминированный, минимальный, эквивалентность, изоморфизм.
12. Детерминизация за  $\mathcal{O}(2^n k)$ , минимизация через детерминизацию (Бржозовский).
13. Простейшая эквивалентность за  $\mathcal{O}((nk)^2)$ . Корректность. Def минимального через  $R(s)$ .
14. Эквивалентность через минимизацию. Минимизация за  $\mathcal{O}(n^2 k)$ , за  $\mathcal{O}(nk \log n)$  (Хопкрофт).
15. Изоморфность за  $\mathcal{O}(nk)$ , эквивалентность минимальному (дан минимальный) за  $\mathcal{O}(nk)$ .
16. Правые контексты:  $s \rightarrow sa$ ,  $R_s \rightarrow R_{sa}$ , леммы, поиск состояния, которое раздвоится.
17. Суффиксный автомат: алгоритм, корректность, время работы.
18. Суффиксный автомат: оценка на число вершин и рёбер, связь с суффиксным деревом.
19. Задачи:  $\#\{\text{различных подстрок}\}$ , first/last вхождение,  $\max |s|$  с 2 вхождениями без  $\cap$ .
20. Задачи: LZSS за  $\mathcal{O}(n)$ .
21. Задачи: общая подстрока  $k$  строк за линейное время с памятью  $\mathcal{O}(\min |s_i|)$ .

### Линейное программирование 1

22. Инкрементальный Гаусс за  $\mathcal{O}(nmk)$ .
23. ЛП. Формулировка, сведения различных форм задачи друг к другу.
24. Кошерный вид задачи ЛП. Форма  $\begin{bmatrix} A & b \\ c & -z \end{bmatrix}$ . Симплекс-метод при условии  $\exists$ -я начального решения.
25. Кошеризация задач вида  $Ax = b$ ,  $Ax \leq b$ . Поиск начального решения.
26. Анализ симплекса: условие существования решения, условие ограниченности решения, оптимальность найденного решения, конечность алгоритма и правило Блэнда, время работы алгоритма.
27. LP и ILP – формулировки. ILP  $\in$  NP-hard. Приближение для взвешенного VC.
28. Задачи в форме ЛП: поиск расстояний, потенциалов, max-flow, min-cost-k-flow, паросочетание, взвешенное паросочетание, мультипродуктовый поток, задача про два пути.
29. Lm о нулях. Симплекс перебирает вершины полиэдра. Простое решение ЛП – перебор базисных планов.

## Линейное программирование 2

30. Обучение Перцептрона. Анализ алгоритма. Сведение  $Ax > b \Leftrightarrow Ax > 0$ .
31. Метод Эллипсоидов: алгебра эллипсоидов; задача, алгоритм, корректность нового эллипсоида.
32. Метод Эллипсоидов: анализ объёмов эллипсоидов, общее время работы; обобщение для сфер, конусов.
33. Двойственная задача для всех трёх форм. Слабая и сильная теоремы двойственности. Доказательство. Неограниченность, отсутствие решения. Получение решения обеих задач.
34. Частные случаи ЛП:  $Ax = b \wedge n < m$ ,  $Ax \leq b \wedge n < m$ , линейный алгоритм для  $dim = \mathcal{O}(1)$ .
35. Тотальная унимодулярность матрицы инцидентности, целочисленность решения ЛП для паросочетания.
36. Матричные игры: задача, детерминированные стратегии, осторожная жадность, вероятностные стратегии, нахождение через ЛП и доказательство оптимальности, равновесие Нэша.

## Паросочетание в произвольном графе

37. Симметрические разности.  $M \triangle P$ ,  $M_1 \triangle M_2$ ,  $(M \triangle P_1) \triangle (M \triangle P_2)$ .
38. Lm о дополняющем пути, Lm о корректности Куна, dfs/bfs для поиска ЧДП.
39. Теорема Эдмондса<sup>+</sup>, строгое доказательство.
40. Алгоритм Эдмондса за  $\mathcal{O}(V^3)$  с рекурсивным сжатием/расжатием.
41. Реализация Габова за  $\mathcal{O}(V^3)$ , через `p[]`, `mate[]`, `base[]`.
42. Оптимизации:  $\mathcal{O}(|M| \cdot V^2)$ , жадная инициализация, улучшение всех трёх частей Габова до  $\mathcal{O}(VE \cdot \alpha)$ .

## Факторизация

43. Метод Ферма. Метод Крайчика за  $\mathcal{O}(k^3 + km)$ .  $b$ -гладкие числа.
44. Оптимизация до  $\mathcal{O}((k^2 + m) \log \log k)$ , итоговое время работы.

## Планарные графа

45. Определения. Теоремы: Эйлера,  $E = \mathcal{O}(V)$ , Куратовского (док-во в одну сторону), Фари, Шнайдер.
46. Демукрон за  $\mathcal{O}(V^2)$  – алгоритм выделения граней, проверки на планарность.
47. Рисовка планарного графа. Струнная Теорема Татта. Триангуляция. Алгоритм.
48. Планарный сепаратор. Теорема Тарьяна-Липтона. Доказательство.
49. Следствия из теоремы. Задача `max-IS` и `k-coloring` для планарного графа.
50. Закон Кирхгоффа, нахождение сопротивления сети. Решения систем для  $k$ -диагональных матриц.
51. Выделение граней плоского графа.