

Вопросы к экзамену по алгоритмам

СПбГУ, первый курс, осень, 2018/19 учебный год

Курсивом помечено то, что было разобрано на практике.

База и линейные структуры

1. (a) База. Асимптотика. Обозначения $o, O, \Theta, \Omega, \omega$. Основные свойства. Асимптотика многочлена.
2. (b) База. Сумма гармонического ряда. Список делителей для всех чисел от 1 до n .
3. (b) База. Рекуррентные соотношения: алгоритм Карацубы.
4. (b) База. Рекуррентные соотношения: мастер-теорема (о простом рекуррентном соотношении).
5. (c) База. Рекуррентные соотношения: теорема об экспоненциальном рекуррентном соотношении.
6. (a) База. Числа Фибоначчи. Доказательства рекуррентностей по индукции.
7. (a) DS. Частичные суммы. Массив фикс. размера. Список двусвязный, односвязный, на массиве.
8. (a) DS. Вектор (расширяющийся массив). Стек, очередь, дек. Средства языка C++ и их сравнение. Сравнение дека на списке и на массиве.
9. (a) DS. Очередь и дек на циклическом массиве. Стек с минимумом. Очередь с min через два стека.
10. (b) DS. Очередь с минимумом, второй способ (дек минимумов).
11. (b) DS. Время работы: real, average, amortized. Схема с монетками. Примеры.
12. (b) DS. Вектор: избавление от амортизации. 2 способа.
13. (c) DS. Очередь с минимумом: избавление от амортизации.

Поиск и сортировки

14. (a) DS. Бинарный поиск. 3 версии. Средства языка C++.
15. (b) DS. Алгоритм Мо. Два указателя на примере задачи «количество различных чисел на отрезке».
16. (a) Sort. Квадратичные: Insertion, Selection, Bubble. Сравнение. Стабильность. IntroSort.
17. (b) Sort. Оценка снизу на число сравнений.
18. (b) Sort. MergeSort. Нерекурсивная версия. Число инверсий.
19. (b) Sort. QuickSort без доказательства. Две версии partition: на python, двумя указателями. Способы выбора элемента для partition.
20. (b) Sort. QuickSort. Доказательство времени работы.
21. (a) Sort. Сравнение сортировок за $O(n \log n)$.
22. (b) Sort. Порядковая статистика за линейное время, рандомизированный алгоритм. Средства C++.
23. (b) Sort. Порядковая статистика за линейное время, детерминированный алгоритм.
24. (b) Sort. Count Sort для чисел и для пар чисел, Radix Sort за $O(n \log_n m)$.
25. (b) Sort. Bucket Sort. Две версии алгоритма.
26. (c) Sort. Kirkpatrick Sort за $O(n \log \log C)$
27. (a) Разделяй и властвуй: поиск двух ближайших точек.
28. (b) Inplace алгоритмы. Unique. Rotate. Merge за $O(n \log n)$.

Хеш-таблицы и кучи

29. (a) DS. Хеш-таблица с открытой адресацией.
30. (b) DS. Бинарная куча: хранение в массиве, Add, ExtractMin, DecreaseKey и обратные ссылки.
31. (b) DS. Бинарная куча: построение за линию, heap sort (inplace!). Средства языка C++.
32. (b) DS. Преобразование операций. Ничего \rightarrow Del, Find \rightarrow Del, Add \rightarrow Merge.
33. (c) Heap. Van Embde Boas trees. Добавление элемента и извлечение минимума.
34. (b) Heap. MinMax Heap. Подробная оценка времени работы.
35. (b) Heap. Leftist Heap, Skew Heap.
36. (a) Heap. Куча, умеющая {Add, Min, Merge, DecreaseKey} за $\mathcal{O}(1)$, ExtractMin за $\mathcal{O}(n)$.
37. (e) Heap. Нижняя оценка на время построения бинарной кучи.
38. (b) Heap. Binomial Heap.
39. (b) Heap. Fibonacci Heap: Add и Merge за $\mathcal{O}(1)$, алгоритм для DecreaseKey.
40. (c) Heap. Fibonacci Heap: доказательство корректности, оценка времени работы.
41. (a) DP. Вперёд, назад, ленивая. Восстановление ответа. Пример: «калькулятор». Ациклический граф состояний. Формулировка задачи в терминах графа. Формулировка терминов «вперёд», «назад», «ленивая» через граф состояний.
42. (b) DP. Рюкзак без стоимостей за $\mathcal{O}(nW)$ времени, $\mathcal{O}(W)$ памяти с восстановлением ответа. Применение bitset. Проблемы с восстановлением ответа в случае стоимостей. Решение рюкзака со стоимостями.
43. (a) DP. Задача НОП. Восстановление ответа без дополнительных ссылок назад. Оптимизация памяти, если нет восстановления ответа.
44. (c) DP. Алгоритм Хиршберга для НОП за $\mathcal{O}(n^2)$ времени, $\mathcal{O}(n)$ памяти с восстановлением ответа.
45. (b) DP. Трёхсторонний путь по матрице мин веса (про министерство). Оптимизация памяти до $\mathcal{O}(n\sqrt{m})$.
46. (a) DP. Задача LCP. Задача «расстояние Левенштейна».
47. (b) DP. Задача LIS (НВП). Решения за $\mathcal{O}(n^2)$ и за $\mathcal{O}(n \log n)$.
48. (b) DP. Возведение матрицы в степень: количество путей длины k , решение линейного рекуррентного соотношения.
49. (b) DP. Два указателя на примере задачи про выбор k точек на прямой среди n данных. Без док-ва.
50. (e) DP. Доказательство $p_{k-1,n} \leq p_{k,n} \leq p_{k,n+1}$.
51. (b) DP. Решение задачи про выбор k точек на прямой среди n данных методом «разделяй и властвуй».
52. (a) DP. Подотрезки. Расстановка скобок в выражении, умножение матриц. Восстановление ответа.
53. (a) DP. Поддеревья. Максимальное по весу паросочетание в дереве.

Комбинаторика и подмножества

54. (b) Комбинаторика. Объект по номеру, номер по объекту. Перестановки, скобочные последовательности.
55. (a) Комбинаторика. Подсчет числа разбиений на слагаемые: упорядоченные, неупорядоченные.
56. (a) DP. Операции с множествами, как с n -битовыми числами. Количество бит в числе за $\mathcal{O}(2^n)$. Сумма на подмножестве за $\mathcal{O}(2^n)$.
57. (b) DP. Гамильтонов путь и цикл за $\mathcal{O}(2^n n)$.
58. (a) DP. Проверка независимости всех подмножеств вершин за $\mathcal{O}(2^n)$.
59. (b) DP. Перебор подмножеств и надмножеств. Покраска вершин графа в минимальное число цветов за $\mathcal{O}(3^n)$.
60. (c) DP. Оптимизация покраски вершин графа в минимальное число цветов с $\mathcal{O}(3^n)$ до $\mathcal{O}(2.44^n)$.
61. (a) DP. Set Cover («рюкзак на подмножествах»).
62. (b) Meet in the Middle. Подсчет числа клик за $\mathcal{O}(2^{n/2})$.
63. (b) Meet in the Middle. Рюкзак с ценами за $\mathcal{O}(2^{n/2} n)$.
64. (c) DP. Динамика по скошенному профилю: количество замощений доминошками за $\mathcal{O}(2^h h w)$. Только рекурсивная реализация.

Графы и dfs

65. (a) База. Хранение графов. Матрица смежности, $\text{bitset}\langle N \rangle []$, $\text{vector}\langle \text{int} \rangle []$, $\text{set}\langle \text{int} \rangle []$, мультиписок.
66. (a) dfs. Def: путь, простой путь. Поиск простого пути между a и b dfs-ом за $\mathcal{O}(E)$. Def: связность, сильная связность, слабая связность, компоненты связности. Поиск компонент связности за $\mathcal{O}(V + E)$.
67. (a) dfs. Циклы. Def: цикл, контур. Поиск цикла в орграфе, в неорграфе за $\mathcal{O}(V + E)$. Проверка на двудольность.
68. (b) dfs. Поиск topsort двумя способами. Связь с динамическим программированием.
69. (b) dfs. Выделение компонент сильной связности за $\mathcal{O}(V + E)$. Конденсация графа.
70. (b) dfs. Euler. Критерий Эйлеровости. Поиск Эйлера пути и цикла за $\mathcal{O}(V + E)$. Задачи: дополнение графа до Эйлера, разбиение рёбер графа на минимальное число путей.
71. (b) dfs. 2-connectivity. Поиск мостов. Выделение компонент реберной двусвязности.
72. (b) dfs. 2-connectivity. Поиск точек сочленения. Выделение компонент вершинной двусвязности.
73. (b) dfs. 2-SAT. Решение за $\mathcal{O}(n + m)$. Задачи: 2-List-Coloring.
74. (b) dfs. Матрица достижимости графа за $\mathcal{O}(VE)$, за $\mathcal{O}(\frac{VE}{w})$.
75. (b) dfs. 3-SAT. Решение за за $\mathcal{O}(1.5^n(n + m))$.

Сложность и рандом

76. (a) Неразрешимость halting problem. Разрешимые: decision, search. Язык. Классы: DTime, P, EXP. Иерархия по времени. $P \neq EXP$.
77. (a) Классы NP, coNP, coNEXP. Примеры: k-CLIQUE, MAX-CLIQUE, HAM-PATH, PRIME, coPRIME, IS-SORTED.
78. (b) Классы NP-hard, NP-complete, полиномиальное сведение. $BN \in NP\text{-complete}$.
79. (b) Сведения $BN \rightarrow \text{CIRCUIT-SAT} \rightarrow \text{SAT} \rightarrow 3\text{-SAT}$.
80. (a) Сведения $3\text{-SAT} \rightarrow k\text{-IND} \rightarrow k\text{-CLIQUE} \rightarrow \text{VERTEX-COVER}$.
81. (a) Задачи максимизации; search \rightarrow decision; search 3-SAT \rightarrow search k-IND. Решение NP задач.