

Первый курс, осенний семестр 2018/19
Практика по алгоритмам #8

Динамика

27 октября

Собрано 29 октября 2018 г. в 19:36

Содержание

1. Динамика	1
2. Разбор задач практики	2
3. Домашнее задание	3
3.1. Обязательная часть	3
3.2. Дополнительная часть	4

Динамика

1. Задача Иосифа Флавия

n человек стоят по кругу. p -й по счету человек покидает круг. Затем со следующего за ним снова отсчитывают p -го, он тоже уходит, и так далее.

Даны n и p , кто останется в кругу последним? $\mathcal{O}(n)$.

2. Рюкзак с ценами

Даны n предметов. У каждого есть цена v_i и вес w_i . Найти max цену, которую можно набрать предметами суммарного веса $\leq S$.

Время $\mathcal{O}(nS)$, память $\mathcal{O}(S)$.

3. Наибольшая общая возрастающая подпоследовательность

Найти наибольшую общую возрастающую подпоследовательность двух

a) $\mathcal{O}(n^4)$.

b) $\mathcal{O}(n^3)$.

c) $\mathcal{O}(n^2)$.

4. Ленивость

Есть n котят. Нужно посчитать число групп, на которые поделятся котята, если они делятся на группы $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ при $n > k$ и не делятся при $n \leq k$.

Доказать, что при решении ленивой динамикой будет $\mathcal{O}(\log n)$ состояний.

5. Разбиение на палиндромы

Разбить строку на минимальное число палиндромов за $\mathcal{O}(n^2)$ времени и $\mathcal{O}(n)$ памяти.

6. Строки Фибоначчи

a) Сколько существует строк длины n из 0, 1, не содержащих два нуля подряд?

b) Сколько существует строк длины n из 0, 1, 2, не содержащих две равные цифры подряд?

c) Разгоним нашу динамику до $\mathcal{O}(\log n)$!

7. Точки на круге

Найти число подмножеств из n точек на круге, таких, что любые два соседних элемента множества на расстоянии 1, 3 или 5. Решить для $n \leq 10^9$.

8. (*) Плохая подстрока

Сколько существует строк из 0, 1, 2, не содержащих, как подстроку s , $|s| \leq 50$?

9. (*) Ровный абзац

Дан текст (набор слов) с длинами $l_1, l_2, \dots, l_n$. Разбить текст на строки длины не более L . Менять порядок слов и переносить слова нельзя. Между каждой парой слов стоит хотя бы один пробел, остаток строки заполнен пробелами.

Минимизировать $\sum \text{gap}_i^3$, где gap_i – число пробелов в строке i . $\mathcal{O}(nL)$.

10. (*) Текст в окне

Дан текст из n слов. Выбрать подотрезок слов, который поместится на экран $h \times w$ без переносов, и суммарная длина слов в котором максимальна.

11. (*) Наибольшая общая возрастающая подпоследовательность

$\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n)$ памяти, восстановить ответ простым способом без Хиршберга.

12. (*) Быстрый калькулятор

Получить из числа 1 число N операциями +1, *2, *3. Минимизировать число операций. Решить за полилогарифм от N . Корректность и время работы решения требуется обосновать.

Разбор задач практики

1. Задача Иосифа Флавия

Когда из круга уйдёт один человек, останется круг из $n - 1$ человека, решим для них задачу. Знаем номер ответа в круге, где отсчет был с p -го человека.

$\text{ans}[n] = (\text{ans}[n - 1] + p) \% n$.

2. Рюкзак с ценами

```
for (int i = 0; i < n; ++i)
    for (int j = S; j >= w[i]; --j)
        f[j] = max(f[j], f[j - w[i]] + v[i]);
answer = f[S];
```

3. Наибольшая общая возрастающая подпоследовательность

$\text{ans}[j, i]$ – длина НОВП, кончающейся ровно в $a[i]$, и использующая элементы из $b[0..j]$. Переход $\text{ans}[j] \rightarrow \text{ans}[j+1]$: изначально $\text{ans}[j+1] = \text{ans}[j]$, добавим $b[j]$.

Перебираем i , помним k : $a[k] < b[j]$, $\text{ans}[j, k] = \max$.

Если $a[i] < b[j]$, обновим k . Если $a[i] = b[j]$, обновим $\text{ans}[j+1, i]$ на $\text{ans}[j, k] + 1$.

4. Ленивость

На каждом уровне рекурсии работаем с числами из отрезка $[L_i, R_i]$. $L_1 = R_1 = n$.

Утверждение: $R_i - L_i \leq 1$. Переход: $[2k, 2k + 1] \rightarrow [k, k + 1]$, $[2k - 1, 2k] \rightarrow [k - 1, k]$.

5. Разбиение на палиндромы

$f[i]$ – количество палиндромов, на которые можно разбить префикс.

$f[i] = \min_{j < i, [j, i] \text{ – палиндром}} (f[j] + 1)$.

Есть два способа быстро проверять, является ли строка палиндромом:

а) Предподсчитать для всех пар $[j, i]$, но это требует квадрат памяти

б) Для каждого i найти $r_0[i]$, $r_1[i]$ – длины максимальных палиндромов чётной и нечётной длины с центром в i .

6. Точки на круге

Это упражнение на тему “узрите матрицу, возведите её в степень”.

Как догадаться, что где-то здесь нужно возведение в степень?

$n = 10^9$, поэтому решение – или формула, или динамика с возведением матрицы в степень.

Решение: $f[i] = f[i - 1] + f[i - 3] + f[i - 5]$.

Линейное рекуррентное соотношение, размер матрицы 5×5 , обозначим матрицу A . У нас круг, надо это учесть. Заметим, что расстояние между первой и последней точкой – $n - 1$, $n - 3$ или $n - 5 \Rightarrow \text{res} = A^{n-1}[0, 0] + A^{n-3}[0, 0] + A^{n-5}[0, 0]$.

P.S. В общем случае при решении задачи на круге нужно было бы перебрать все корректные состояния v первых пяти точек и посчитать $\sum_v B^n[v, v]$, где B – матрица переходов между “состояниями 5 подряд идущих точек”.

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. (4) Сводный брат Фибоначчи

Мы стоим в точке 0, за ход можем сместиться вправо на любое из чисел $1, 2, \dots, k$.

Сколько способов прийти в точку n ?

- a) (1) $\mathcal{O}(nk)$
- b) (1) $\mathcal{O}(n)$
- c) (2) $\mathcal{O}(\text{poly}(k) \log n)$

2. (4) Рюкзак с ценами

Время $\mathcal{O}(nS)$, память $\mathcal{O}(S)$.

- a) (1) Каждый предмет можно брать сколько угодно раз.
- b) (1) То же + набрать ровно S + **цен нет** + восстановление ответа.
Простым эффективным способом.
- c) (2) Каждый предмет можно брать один раз + восстановление ответа.

3. (2) Быстрый НОП

Даны две последовательности длины n , **все элементы которых различны**. Найдите их НОП за $\mathcal{O}(n \log n)$.

Указание: мы умеем искать НВП за $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. (2) Наибольшая пилообразная подпоследовательность

Последовательность называется пилообразной, если никакие её три подряд идущих элемента не образуют ни возрастающую, ни убывающую последовательность. Найдите наибольшую пилообразную подпоследовательность данного массива за $\mathcal{O}(n^2)$.

(+1) балл за $\mathcal{O}(n^{2-\epsilon})$.

5. (1) LCP

Дана строка s . Для каждой пары (i, j) найти длину общего префикса i -го и j -го суффиксов s .

6. (3) LZSS

Дана строка из латинских букв длины n , нужно ее запаковать в максимально короткую, используя правило (n, i) — повторить n символов начиная с i -й позиции.

Например, $s = xyabababababz \rightarrow xyab(8, 2)z$.

Еще пример: $s = xyaaaaabaaaaab \rightarrow xyaa(3, 2)b(10, 2)$. Более оптимально $xyaaaaab(10, 2)$.

Заметим, длина (n, i) — **не** константа.

Решить за $\mathcal{O}(n^2)$. (1) балл за $\mathcal{O}(n^3)$, (2) балла, если работает только для константной длины (n, i) .

3.2. Дополнительная часть

1. (3) Рюкзак с мультипредметами

Даны n предметов. У каждого есть цена v_i и вес w_i . Каждый предмет можно взять от 0 до k_i раз. Найти максимальную суммарную цену, которую можно набрать таким образом, чтобы суммарный вес не превышал W . $\mathcal{O}(nW)$.

2. (4) Перестановки с локальными минимумами

Посчитайте количество перестановок из n элементов с ровно k локальными минимумами.

а) (2) $\mathcal{O}(n^3)$

б) (2) $\mathcal{O}(n^2)$

3. (4) Выражение

Даны натуральные числа и знаки $+$, $*$ между ними. Есть ли порядок выполнения операций, чтобы получить требуемое число X ? Открытые ограничения.

Интересны лишь решения, для $X \sim 10^9$ и больше.

4. (3) Быстрый НОП

Найдите наибольшую общую подпоследовательность за $o(n^2)$. Элементы из $[1..n]$.