

Первый курс, осенний семестр 2018/19

Практика по алгоритмам #1

Асимптотика и рекуррентные соотношения

8 сентября

Собрано 8 сентября 2018 г. в 21:17

---

## Содержание

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Асимптотика и рекуррентные соотношения</b> | <b>1</b> |
| <b>2. Разбор задач практики</b>                  | <b>2</b> |
| <b>3. Домашнее задание</b>                       | <b>6</b> |
| 3.1. Обязательная часть . . . . .                | 6        |
| 3.2. Дополнительная часть . . . . .              | 7        |

# Асимптотика и рекуррентные соотношения

## 1. Простые задачи на асимптотику

Найти короткую запись через  $\Theta$ .

Если такой не существует, объяснить, почему, и записать через  $\mathcal{O}$ .

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| a) $2n$                 | f) $\frac{\arctg n}{n} + \frac{\log \log n}{\log n}$        |
| b) $2n + 1$             | g) $\sqrt{\frac{n}{\log n} + \frac{7 \log n}{n}} + n^{1/3}$ |
| c) $n^2 + 5n + 1$       | h) Докажите: $\forall f, g > 0: f + g = \Theta(\max(f, g))$ |
| d) $\frac{n^2+3}{7n+1}$ | i) $\frac{P(n)}{Q(n)}, \deg P > \deg Q > 0$                 |
| e) $n(2 + \sin n)$      |   |

## 2. Истина или ложь?

Проверьте корректность, докажите.

- |  |  |
|--|--|
| a) $2^{n+3} = \Theta(2^n)$   | g) $f(n) + g(n) = \Theta\left(\frac{f(n)+g(n)}{2}\right)$  |
| b) $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$  | h) $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$                                |
| c) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = \mathcal{O}(2^{f(n)})$   | i) $\frac{n}{\log n} = \omega(\log n)$ (А если $\Omega$ ?) |
| d) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = o(2^{f(n)})$                       | j) $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n)$                |
| e) $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = \mathcal{O}(\log f(n))$ | k) $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = \mathcal{O}((\log n)^n)$         |
| f) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = o(\log f(n))$                     |  |

## 3. Рекуррентность

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$
- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$
- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n$
- $T(n) = T(n-1) + T(n-1) + 1$

## 4. Дополнительные задачи

a) Найдите короткую запись через  $\Theta$ .

Если  $\nexists$ , объяснить, почему, и записать через  $\mathcal{O}$ .

$$f(n) = n(1 + \sin n)$$

- То же для  $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$
- $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$
- $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$
- $T(n) = T\left(\frac{n}{\log n}\right) + \log n$
- $T(n) = T(n-1) + T(\sqrt{n})$

# Разбор задач практики

## 1. Простые задачи на асимптотику

a)  $2n = \Theta(n)$ , по определению :)

b)  $n \leq 2n + 1 \leq 2n + n = 3n \Rightarrow 2n + 1 = \Theta(n)$ .

c)  $n^2 \leq n^2 + 5n + 1 \leq n^2 + 5n^2 + n^2 = 7n^2 \Rightarrow n^2 + 5n + 1 = \Theta(n^2)$ .

d)  $\frac{n^2}{7n+1} \leq \frac{n^2+3}{7n+1} \leq \frac{n^2+n^2}{7n} \Rightarrow \frac{1}{8}n \leq \frac{n^2+3}{7n+1} \leq \frac{2}{7}n \Rightarrow \frac{n^2+3}{7n+1} = \Theta(n)$ .

Способ #2:  $\frac{n^2}{7n+1} = \frac{1}{7}n - \frac{1}{49} + \frac{1/49}{7n+1} = \Theta(n) + o(1) = \Theta(n)$ .

e)  $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow n \leq n(2 + \sin n) \leq 3n \Rightarrow n(2 + \sin n) = \mathcal{O}(n)$ .

f)  $\arctg n < \frac{\pi}{2} < \log \log n$ ,  $n > \log n \Rightarrow \frac{\arctg n}{n} + \frac{\log \log n}{\log n} \leq 2 \frac{\log \log n}{\log n} \Rightarrow \frac{\arctg n}{n} + \frac{\log \log n}{\log n} = \Theta\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)$ .

g)  $\sqrt{\frac{n}{\log n} + \frac{7 \log n}{n}} + n^{1/3} = \Theta\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$ .

h)  $\max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq 2 \max(f(n), g(n))$ .

i)  $\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\Theta(n^{\deg P})}{\Theta(n^{\deg Q})} = \Theta(n^{\deg P - \deg Q})$ .

Стоит формально доказать, что  $\frac{\Theta(f)}{\Theta(g)} = \Theta\left(\frac{f}{g}\right)$ .

Пусть  $C_1 f \leq \Theta(f) \leq C_2 f$ ,  $C'_1 g \leq \Theta(g) \leq C'_2 g$ , тогда  $\frac{C_1 f}{C'_2 g} \leq \frac{\Theta(f)}{\Theta(g)} \leq \frac{C_2 f}{C'_1 g}$ .

## 2. Истина или ложь?

a)  $2^{n+3} = \Theta(2^n)$ .

Верно:  $2^{n+3} = 8 \cdot 2^n = \Theta(2^n)$ .

b)  $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$ .

Неверно:  $2^{2n+1} \leq c \cdot 2^n \Rightarrow 2^{n+1} \leq c \Rightarrow n \leq \log c - 1$ , ложь для достаточно больших  $n$ .

c)  $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = \mathcal{O}(2^{f(n)})$ .

Неверно, возьмём  $g(n) = 2n + 1$ ,  $f(n) = n$ , получим предыдущий пункт.

d)  $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^{g(n)} = o(2^{f(n)})$ . Верно при  $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

При достаточно больших  $n$   $g(n) < 0.9f(n) = f(n) - 0.1f(n) \Rightarrow 2^{g(n)} < 2^{f(n)} \cdot 2^{-0.1f(n)}$ .

Для любой  $C \geq 2^{-0.1f(n)}$  верно  $2^{g(n)} < C \cdot 2^{f(n)}$ . Раз  $f(n) \rightarrow \infty$ , получили  $\forall C$ .

Способ #2 (через пределы):  $g(n) = o(f(n)) \Leftrightarrow \frac{g(n)}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

$\frac{2^{g(n)}}{2^{f(n)}} = 2^{g(n)-f(n)}$ , а  $g(n) - f(n) = f(n) \left(\frac{g(n)}{f(n)} - 1\right) \leq -0.9f(n)$  при больших  $n$ .

$2^{g(n)-f(n)} \leq \frac{1}{2^{0.9f(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

e)  $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = \mathcal{O}(\log f(n))$ .

Верно при  $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  (а также для  $f(n): \liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) > 0$ ).

$\exists c$   $g(n) < cf(n) \Rightarrow \log g(n) < \log c + \log f(n) \Rightarrow \log g(n) < 1.1 \cdot \log f(n)$ .

f)  $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow \log g(n) = o(\log f(n))$ .

Неверно, возьмем  $g(n) = n, f(n) = n^2$ .

g)  $f(n) + g(n) = \Theta\left(\frac{f(n)+g(n)}{2}\right)$ , верно по определению.

h)  $n^2 = \mathcal{O}(2^n)$ .

Верно, доказано на лекции.

i)  $\frac{n}{\log n} = \omega(\log n) \Leftrightarrow \log n = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ .

Верно:  $\forall c \log n < c \frac{n}{\log n} \Leftrightarrow \log^2 n < cn \Leftrightarrow \log^2 n = o(n)$ , верно из лекции.

Если уж  $\omega$ , то  $\Omega$  тем более.

j)  $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n)$ .

Неверно:  $\frac{n}{\log n} = \Theta(0.5 \cdot n) \Rightarrow \frac{n}{\log n} > cn \Rightarrow \log n < \frac{1}{c}$ , ложь для достаточно больших  $n$ .

k)  $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = \mathcal{O}((\log n)^n)$ .

Сравним логарифмы.

$$\log(\sqrt{n}^{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2}\sqrt{n} \log n.$$

$$\log((\log n)^n) = n \log \log n.$$

$\log n = o(\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{n} \log n = o(n) = o(n \log \log n)$ , по пункту (d)  $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = o((\log n)^n) = \mathcal{O}((\log n)^n)$ .

### 3. Рекуррентность

a)  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = 1 + 2(1 + 2T\left(\frac{n}{4}\right)) = 1 + 2 + 4(1 + 2T\left(\frac{n}{8}\right)) = \dots = 1 + 2 + \dots + 2^{\lceil \log n \rceil} = 2^{\lceil \log n \rceil + 1} - 1 = \Theta(n)$ .

Способ #2 (по теореме):  $a = 2, b = 2, c = 0 < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$ .

b)  $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 = n^2 + 3\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 3T\left(\frac{n}{4}\right)\right) = n^2 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{9}{16}n^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n} n^2 \leq n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = n^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4n^2 \Rightarrow n^2 \leq T(n) \leq 4n^2 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$ .

Способ #2 (по теореме):  $a = 3, b = 2, c = 2 > \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c) = \Theta(n^2)$ .

c)  $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n = n + 5\left(\frac{n}{2} + 5T\left(\frac{n}{4}\right)\right) = n + \frac{5}{2}n + \frac{25}{4}n + \dots + \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_2 n} n = n \frac{2.5^{\log_2 n + 1} - 1}{2.5 - 1} = \Theta(2.5^{\log_2 n}) = \Theta(n^{\log_2(2.5)}) = \Theta(n^{\log_2 5})$ .

Способ #2 (по теореме):  $a = 5, b = 2, c = 1 < \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 5})$ .

d)  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n = n \log n + 2\left(\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + 2T\left(\frac{n}{4}\right)\right) = n \log n + n \log \frac{n}{2} + \dots + n = n(\log n + (\log n - 1) + (\log n - 2) + \dots + 1) = \Theta(n \log^2 n)$ .

Способ #2 (по обобщенной теореме):  $a = 2, b = 2, f(n) = \Theta(n^1 \log^1 n), c = \log_b a = 1, d = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log^{d+1} n) = \Theta(n \log^2 n)$ .

e)  $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n = n + 3\left(\frac{n}{3} + 3T\left(\frac{n}{9}\right)\right) = n + \frac{3}{3}n + \frac{9}{9}n + \dots = \sum_{i=0}^{\log_3 n} n = \Theta(n \log n)$ .

Способ #2 (по теореме):  $a = 3, b = 3, c = 1 = \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log n) = \Theta(n \log n)$ .

f)  $T(n) = T(n-1) + T(n-1) + 1 = 1 + 2(1 + 2T(n-2)) = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = \Theta(2^n)$ .

Можно доказать это и по индукции, посмотрев на первые несколько членов.

4. **Дополнительные задачи**

a)  $f(n) = n(1 + \sin n)$ .

$f(n) < 2n = \mathcal{O}(n)$ , но  $f(n) \neq \Theta(n)$ . Говоря грубо,  $(1 + \sin n)$  бесконечно часто будет опускаться почти до нуля.

Формально нужно  $\forall C, N \exists n > N: n(1 + \sin n) < Cn$ . Покажем более сильное утверждение  $\forall N, \varepsilon > 0, y \in [-1..1] \exists n > N: |y - \sin n| < \varepsilon$ .

Пусть  $x = \arcsin y$ , хотим найти  $n$  с синусом, близким к  $\sin x$ . Для этого достаточно, чтобы  $(n \bmod 2\pi)$  было близко к  $x$ :  $|\sin n - \sin x| \leq |(n \bmod 2\pi) - x|$ .

$\pi$  иррационально  $\Rightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j: (i \bmod 2\pi) \neq (j \bmod 2\pi)$ . Рассмотрим первые  $m$  натуральных чисел, у них разные остатки по модулю  $2\pi$ , то есть, им соответствуют разные точки на единичной окружности.

Есть точки  $i, j$  на расстоянии  $\leq \frac{2\pi}{m}$ . Взяв  $m = \lceil \frac{2\pi}{\varepsilon} \rceil$ , получим, что сделав  $t = |j - i|$  шагов, мы смещаемся по окружности на  $\leq \varepsilon$ . Тогда, ходя с шагом  $t$ , можно попасть в  $\varepsilon$ -окрестность любой точки на окружности.

Чтобы попасть в окрестность  $x$  после  $N$ , берем  $k = \lfloor \frac{x - \sin N}{t} \rfloor$  и  $n = N + kt$ .

b)  $f(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$ . Никак особо не упростить.

Надо только понимать, что  $\forall C > 0 \log^C n = o(2^{\sqrt{\log n}})$  и  $2^{\sqrt{\log n}} = o(n^C)$ .

c)  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$ .

$$T(n) = 1 + T(\frac{n}{2}) = 1 + 1 + T(\frac{n}{4}) = \dots = \log n.$$

Способ #2 (по теореме):  $a = 1, b = 2, c = 0 = \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c \log n) = \Theta(\log n)$ .

d)  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$ .

$$T(n) = n + T(\frac{n}{2}) = n + \frac{n}{2} + T(\frac{n}{4}) = \dots = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 \approx 2n = \Theta(n).$$

Способ #2 (по теореме):  $a = 1, b = 2, c = 1 > \log_b a \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c) = \Theta(n)$ .

e)  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + 1$ .

Сначала откинем единичку. Без единички  $T(n)$  будет пропорционально числу листьев дерева рекурсии, а с ней – числу всех вершин. Поскольку дерево двоичное, это даст отличие только в два раза.

Видно, что  $\Omega(n^{\log_3 2}) < T(n) < \mathcal{O}(n)$ . Предположим, что  $T(n) = n^\alpha$ , тогда:

$$n^\alpha = (\frac{n}{2})^\alpha + (\frac{n}{3})^\alpha \Leftrightarrow 1 = (\frac{1}{2})^\alpha + (\frac{1}{3})^\alpha.$$

При  $\alpha = 0$  правая часть равна  $2 > 1$ , при очень больших  $\alpha$  правая часть почти  $0 < 1$ , так что график правой части где-то пересечет единицу, у уравнения есть решение. Обычно такие уравнения решают не аналитически, а приближённо, например, бинарным поиском.

Способ #2. Пусть  $T(n) = S(\log n)$ , тогда  $S(n) = S(n - 1) + S(n - \log 3) + 1$ , пользуемся теоремой «об экспоненциальных рекуррентных соотношениях».

f)  $T(n) = T(\frac{n}{\log n}) + \log n$ .

Грубая прикидка: на каждом уровне  $\approx \log n$ , уровней  $\approx \log_{\log n} n = \frac{\log n}{\log \log n}$ , итого  $\Theta(\frac{\log^2 n}{\log \log n})$ .

Докажем  $T(n) = \Omega(\frac{\log^2 n}{\log \log n})$ . Пока  $n$  не дойдет до  $\sqrt{n}$ ,  $\log n$  будет неизменным с точностью

до константы, а уровней рекурсии надо потратить не менее  $\log_{\log n} \sqrt{n} = \Omega\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$ .

Теперь докажем  $\mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{\log \log n}\right)$ . Для этого заметим, что  $\forall n$  при переходе от  $n$  до  $\sqrt{n}$  у нас будет не более  $\log_{\log \sqrt{n}}(n/\sqrt{n})$  слагаемых, каждое из которых не более  $\log n$ .

Сумма всех этих слагаемых не больше  $X(n) = C \frac{\log^2 n}{\log \log n}$ .

Осталось сложить переходы  $n \rightarrow n^{1/2} \rightarrow n^{1/4} \rightarrow \dots$ .

$X(n) + X(n^{1/2}) + X(n^{1/4}) + \dots \leq X(n) + \frac{1}{2}X(n) + \frac{1}{4}X(n) = \Theta(X(n)) = \mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{\log \log n}\right)$ .

g)  $T(n) = T(n-1) + T(\sqrt{n})$ .

Будем искать  $T(n)$  в виде  $n^a$ , тогда получаем, что  $(n^a)' \approx n^{\frac{a}{2}} \Rightarrow a-1 = \frac{a}{2} \Rightarrow a=2$ .  
Докажем по индукции оценку сверху  $n^2$ :  $T(n-1) + T(\sqrt{n}) \leq (n-1)^2 + n < n^2$ .

Далее можно уточнить асимптотику и получить  $\frac{n^2}{\log n}$ .

$\Omega\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$  показывается прямой подстановкой.

$\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$  показать сложно, зато можно показать  $\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{\log^{1-\varepsilon} n}\right)$  для сколь угодно малого  $\varepsilon$ .

# Домашнее задание

## 3.1. Обязательная часть

### 1. (2.5) Истина или ложь?, (0.5) за каждый пункт

Проверьте корректность, докажите.

l)  $n^{\log n} = \mathcal{O}(1.1^n)$

m)  $\frac{n^3}{n^2+n \log n} = \mathcal{O}(n \log n)$

n)  $\forall f: f(n) = \mathcal{O}(f(\frac{n}{2}))$

o)  $\forall f: f(n) \pm o(f(n)) = \Theta(f(n))$

p)  $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

### 2. (2.5) Рекуррентность, (0.5) за каждый пункт

Во всех задачах предполагается, что  $\forall x \leq 1, T(x) = 1$

g)  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n$

h)  $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \log^2 n$

i)  $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + 1$

j)  $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

k)  $T(n) = T(n-1) + n$

### 3. (3) Заполнить табличку

$A = \mathcal{O}(B)$ ?  $A = o(B)$ ? и т.д. За каждый неправильный ответ (-0.1) балл.

| $A$          | $B$          | $\mathcal{O}$ | $o$ | $\Theta$ | $\omega$ | $\Omega$ |
|--------------|--------------|---------------|-----|----------|----------|----------|
| $n$          | $n^2$        | +             | +   | -        | -        | -        |
| $\log^k n$   | $n^e$        |               |     |          |          |          |
| $n^k$        | $e^n$        |               |     |          |          |          |
| $\sqrt{n}$   | $n^{\sin n}$ |               |     |          |          |          |
| $2^n$        | $2^{n/2}$    |               |     |          |          |          |
| $n^{\log m}$ | $m^{\log n}$ |               |     |          |          |          |
| $\log(n!)$   | $\log(n^n)$  |               |     |          |          |          |

### 4. (6) Упорядочить 30 функций в порядке возрастания

Если какие-то функции равны ( $f = \Theta(g)$ ), указать это. Здесь  $\log n$  — двоичный логарифм,  $\ln n$  — натуральный логарифм. За каждый неправильный ответ (-0.2) балла.

|                  |                       |                       |                   |            |                 |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------|------------|-----------------|
| $\log(\log^* n)$ | $2^{\log^* n}$        | $(\sqrt{n})^{\log n}$ | $n^2$             | $n!$       | $(\log n)!$     |
| $(3/2)^n$        | $n^3$                 | $\log^2 n$            | $\log(n!)$        | $2^{2^n}$  | $n^{1/\log n}$  |
| $\ln \ln n$      | $\log^* n$            | $n \cdot 2^n$         | $n^{\log \log n}$ | $\ln n$    | 1               |
| $2^{\ln n}$      | $(\log n)^{\log n}$   | $e^n$                 | $4^{\log n}$      | $(n+1)!$   | $\sqrt{\log n}$ |
| $\log^* \log n$  | $2^{\sqrt{2 \log n}}$ | $n$                   | $2^n$             | $n \log n$ | $2^{2^{n+1}}$   |

Примечание:  $\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \leq 1; \\ 1 + \log^*(\log n) & \text{иначе} \end{cases}$

### 5. (1) Посчитать точно, (0.5) за каждый пункт

a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

### 3.2. Дополнительная часть

1. **(1) Истина или ложь?, (0.5)** за каждый пункт

Проверьте корректность, докажите.

q)  $n^n = \mathcal{O}(n!)$

r)  $n \log n - \log n! = \Theta(n)$

2. **(1.5) Рекуррентность, (0.5)** за каждый пункт

Во всех задачах предполагается, что  $\forall x \leq 1, T(x) = 1$ .

l)  $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

m)  $T(n) = T(n-1) + T(n-3)$

n)  $T(n) = T(\frac{n}{2}) \cdot T(\frac{n}{3})$ , при этом  $\forall x \leq 3 T(x) = 2$

3. **(1) Рекуррентность и практика**

Дайте наиболее точный ответ, докажите наиболее точные верхние и нижние оценки для  $T(n) = T(n-1) + T(n^{1/3})$ .