Второй курс, осенний семестр 2018/19
Практика по алгоритмам #9

Параметризация: расщепления, ядра

21 ноября

Собрано 23 ноября 2018 г. в 22:51

Содержание

1. Параметризация: расщепления, ядра **1**

2. Разбор задач практики **2**

3. Домашнее задание **3**

Параметризация: расщепления, ядра

1. **Параметризация** CLIQUE
   Пусть максимальная степень графа r фиксирована. Покажите, что клика с параметром k (ее размер) в FPT при этом условии.
   Покажите, что клика в FPT с параметром $k + r$.
2. Vertex Cover
   Мы научились искать VC за время $T(k) = T(k-1) + T(k-2)$.
   Давайте научимся быстрее, придумав, как быть с вершинами степени 2.
3. **Минимальный** Vertex Cover
   Показать, что есть $\leqslant 2^k$ минимальных по включению вершинных покрытий размера $\leqslant k$.
   Перебрать их за $2^k n^{\mathcal{O}(1)}$.
4. Cluster Vertex Deletion
   Удалить $\leqslant k$ вершин так, чтобы граф стал набором дизъюнктных клик. $3^k n^{\mathcal{O}(1)}$.
5. Cluster Editing
   Удалить/добавить $\leqslant k$ ребер так, чтобы граф стал набором дизъюнктных клик. $3^k n^{\mathcal{O}(1)}$.
6. Odd Cycle Transversal
   Удалить $\leqslant k$ вершин, чтобы граф стал двудольным (не было нечетных циклов).
   Решить за $3^k n^{\mathcal{O}(1)}$ при следующем условии: у любого индуцированного подграфа H нашего графа хроматическое число H равно размеру наибольшей клики H.
7. **Запрещенные индуцированные подграфы**
   Пусть F – некоторое семейство графов. Граф G *свободен от* F, если в нем нет индуцированных подграфов, изоморфных какому-то из F.
   За $2^{\mathcal{O}(k)} n^{\mathcal{O}(1)}$ (константы в $\mathcal{O}()$ могут зависеть от F!) хотим выяснить, можно ли данный граф G сделать свободным от F, если нам позволено сделать не более k следующих операций (4 разные задачи):
   a) удаление вершин,
   b) удаление ребер,
   c) добавление ребер,
   d) добавление/удаление ребер.
8. **Ядро для** Point Line Cover
   Дан набор точек на плоскости, узнать, можно ли покрыть их k прямыми.
   Постройте ядро размера $\mathcal{O}(k^2)$.
9. **Ядро для** Edge Clique Cover
   Узнать, можно ли покрыть все ребра графа k кликами.
   Постройте ядро размера 2^k вершин.

Разбор задач практики

1. **Параметризация** CLIQUE
   Ну мы же знаем, что клика решается за $\mathcal{O}^*(2^r)$.

2. Vertex Cover
   Если в графе есть вершина степени $\geqslant 3$, расщепимся по ней.
   Если таких вершин нет, то граф – набор путей и циклов, в нем можно руками найти минимальное вершинное покрытие за $\mathcal{O}(n)$.
   Итого $T(k) \leqslant T(k-1) + T(k-3) \approx 1.4656^k$.

3. **Минимальный** Vertex Cover
   Обычное расщепление за 2^k для Vertex Cover как раз и переберет все минимальные по включению размера $\leqslant k$.
   Если есть непокрытое ребро в поддереве перебора, то все VC должны его содержать, в том числе минимальные, так что они все есть в этом поддереве перебора.
   Каждый лист перебора – минимальное по включению VC. Если бы можно было что-то выкинуть из него, остановились бы на прошлом уровне рекурсии.

4. Cluster Vertex Deletion
   Можно увидеть, что граф – кластер $\Leftrightarrow$ в нем нет индуцированного пути длины 3 («галочки»).
   Пока есть «галочка», надо удалить хоть одну из ее вершин. Перебор 3^k.

5. Cluster Editing
   Аналогично Cluster Vertex Deletion. Перебрать, либо удалить ребро из «галочки», либо добавить. 3 варианта на галочку, перебор глубины $\leqslant k$.

6. Odd Cycle Transversal
   Ответом будет некоторый подграф, у которого хроматическое число $\leqslant 2$.
   Значит, в нем размер максимальной клики $\leqslant 2 \Leftrightarrow$ в нем нет треугольников.
   Пока есть треугольник, перебираем, что из него удалить.

7. **Запрещенные индуцированные подграфы**
   F фиксировано и константно. Можем перебором за $n^{\mathcal{O}(1)}$ проверять, есть ли подграф из F.
   Если есть, то надо обязательно в нем сделать какое-то изменение. Перебор $\mathcal{O}(1)$ вариантов.

8. **Ядро для** Point Line Cover
   Если есть $> k$ точек на одной прямой, то через них точно надо провести прямую.
   Если любая прямая покрывает $\leqslant k$ точек, а точек $> k^2$, то ответ «нет».

9. **Ядро для** Edge Clique Cover
   Наблюдение: если у двух смежных вершин v, u одинаковый набор соседей, то можно добавить ребра из v в те же клики, что содержат u.
   Если видим такую ситуацию, удалим v.
   (Строго говоря, если набор соседей пустой, то надо не удалять v, а взять ребро (v, u) в ответ и уменьшить k.)
   Если такой ситуации нет, то у всех смежных вершин разный набор соседей. Тогда не могут две вершины лежать в одинаковом наборе клик.
   Значит, если вершин $> 2^k$, то ответ «нет».

Домашнее задание

1. **(2) Параметризация** Independent Set
   Пусть максимальная степень графа r фиксирована. Покажите, что Independent Set с параметром k (его размер) в FPT при этом условии.
   Покажите, что Independent Set в FPT с параметром $k + r$.
2. Feedback Vertex Set
   Feedback Vertex Set: удалить из графа $\leqslant k$ вершин, чтобы он стал ацикличным.
   В этой задаче граф неориентированный.
   a) **(2)** Докажите, что если степень всех вершин $\geqslant 3$, то есть цикл длины $\leqslant 2\log n + 1$.
   b) **(2)** Решите Feedback Vertex Set за $(\log n)^{\mathcal{O}(k)} n^{\mathcal{O}(1)}$.
   c) **(2)** Покажите, что полученный алгроитм на самом деле FPT.
3. **(2)** Directed Feedback Vertex/Arc Set
   Feedback Vertex/Arc Set: можно ли удалить из графа $\leqslant k$ вершин/ребер, чтобы он стал ацикличным.
   Двудольный турнир – какая-либо ориентация полного двудольного графа.
   Решить Directed Feedback Vertex Set и Directed Feedback Arc Set за $4^k n^{\mathcal{O}(1)}$ в двудольных турнирах.
4. **Ядро для** Vertex Cover
   На лекции построили ядро с $2k^2$ вершинами. Улучшите ту же конструкцию, чтобы было
   a) **(2)** k^2 вершин,
   b) **(3)** $\frac{2}{3}k^2$ вершин.
5. **(2) Ядро для** Minimum Maximal Matching
   Узнать, есть ли максимальное по включению паросочетание размера $\leqslant k$.
   Постройте ядро размера $\text{poly}(k)$.
6. **Ядро для** Connected Vertex Cover
   Хотим найти вершинное покрытие, являющееся связным подграфом.
   a) **(3)** Постройте ядро размера $2^k + \mathcal{O}(k^2)$.
   b) **(3)** Пусть граф не содержит циклов длины 4. Постройте ядро размера $\mathcal{O}(k^2)$.