Второй курс, осенний семестр 2017/18
Практика по алгоритмам #8

Фурье

14 ноября

Собрано 16 ноября 2018 г. в 14:26

Содержание

Фурье

1. **Возведение в степень**
   За какое время можно посчитать 2^n в десятичной системе счисления?

2. **Поиск с ошибками**
   Даны текст t и строка s над алфавитом размера k. Для каждого из $|t|-|s|+1$ наложений s на t узнать количество ошибок. Время $\mathcal{O}(k|t|\log|t|)$.

3. **Поиск с ошибками и шаблоном**
   Апгрейд предыдущей задачи. И в тексте, и в строке допустимы символы «?».

4. **Дуэль!**
   В каждой клетке полоски $1 \times n$ или растёт дерево, или нет. За $\mathcal{O}(n \log n)$ найдите количество троек деревьев, подходящих для дуэли (два дуэлянта и секундант). Тройка подходит для дуэли, если расстояния равны.

5. **Уравнение**
   Даны n и m. Найти число троек (x, y, z): $x^n + y^n \equiv z^n \bmod m$.

6. **Одно FFT через несколько FFT**
   Сведите вычисление FFT последовательности размера pn к p вычислениям FFT от последовательностей размера n и $\mathcal{O}(p^2 n)$ дополнительных операций.

7. **FFT и повышение точности**
   Перемножьте с помощью FFT $A, B \in K[\mathbb{Z}/10^9\mathbb{Z}]$, степени многочленов до 10^6.

8. **Цепочка умножений**
   Хотим посчитать $P_1(x) \cdot \ldots \cdot P_k(x)$, все многочлены степени n. За сколько можно это сделать?

9. **(*) Задача о рюкзаке**
   Даны n предметов и запросы «можно ли набрать вес w_i, используя только предметы с номерами от l_i до r_i». При этом все $w_i \leqslant s$. Сделайте предподсчёт за $\mathcal{O}(ns \log s)$ так, чтобы на запрос можно было бы в online ответить за $\mathcal{O}(s \log s \log n)$.

10. **(*) Пентагональная теорема Эйлера**
    Сама теорема заключается в том, что $Q(x) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = \sum\limits_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q x^{(3q^2+q)/2}$. Рассмотрим $P(x) = \sum_n x_n p^n$, где p_n – число разбиений числа n на неубывающие слагаемые. Заметим:

    $$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k + x^{2k} + \ldots) = \prod_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{1-x^k}$$

    Используя эти знания и FFT за $\mathcal{O}(n \log n)$, найдите количество разложений числа $n \leqslant 2^{18}$ на возрастающие слагаемые по модулю $3 \cdot 2^{18}+1$ (простое). Предложите, как найти само число, а не только остаток от деления. За $\mathcal{O}(mn \log n + m^2)$, где m – длина ответа.

Разбор задач практики

1. **Возведение в степень**
Возведим в степень за $\mathcal{O}(\log n)$, получаем $\texttt{FFT}(n) + \texttt{FFT}(\frac{n}{2}) + \texttt{FFT}(\frac{n}{4}) + \ldots = \mathcal{O}(n \log n)$.

2. **Поиск с ошибками**
Считаем отдельно для каждого символа s. Фиксируем символ c и строим
$S_c = \sum\limits_{s_i=c} x^i$, $T_c = \sum\limits_{t_{|t|-i+1}=c} x^i$ (то есть t разворачиваем).
$P = S_c T_c$, тогда P_i равно числу позиций, где c есть и в s, и в приложении s к i-й позиции t.

3. **Поиск с ошибками и шаблоном**
То же самое, но в T_c учитываем не только c, но и «?». В конце нужно вычесть пары «?», «?», все они учтены дважды.

4. **Дуэль!**
Если i-я клетка центр тройки (j, i, k), то $j+k = 2i$. Смотрим на многочлен $a = \sum a_i x^i$. $b = a^2$, b_{2i} равно числу нужных пар. Ответ – $\sum b_{2i} - 1$.
Можно обобщить на случай, когда в клетке растет $a_i \in \mathbb{Z}$ деревьев, тогда ответ $\sum b_{2i} a_i - a_i^2$.

5. **Уравнение**
`a[`$x^n \bmod m$`]++`, для всех $x \in [0, m-1]$. Это делается за $\mathcal{O}(m \log n)$. И даже за $\mathcal{O}(m)$: $(xy)^n = x^n y^n$, т.е. степень считать нужно только для простых. Далее $b = a^2, res = \sum(b_i + b_{m+i})a_i$.

6. **Одно `FFT` через несколько `FFT`**
Для простоты распишем для $p = 3$, дальше легко обобщить. $P(x) = P_0(x^3) + xP_1(x^3) + x^2 P(x^3)$.
Посчитали в n точках все P_i, потом в $3n$ точках пересчитаем P по формуле выше.
Заметим, $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + 3n$, а в общем случае $T(n) = kT(\frac{n}{k}) + kn = kn \log_k n$.

7. **`FFT` и повышение точности**
Заметим, что коэффициенты ответа при перемножение, как над $K[\mathbb{Z}]$, не более 10^{23}.
Решение #1. `FFT` по простому модулю и `КТО`. 3 раза перемножим многочлены по разным трём простым модулям порядка 10^9 (для этого нам достаточно типа `int64`). Теперь независимо для каждого из коэффициентов ответа воспользуемся `КТО`: есть остатки по трём модулям...
Решение #2. Представим коэффициенты многочлена A в виде $a_i = b_i + Mc_i$, где $M = \lceil \sqrt{10^9} \rceil$, и $0 \leqslant b_i, c_i < M$. Теперь многочлен $A(x)$ представлен в виде $B(x) + C(x)M$. У нас есть два многочлена, представим так оба, считаем $A_1(x)A_2(x) = (B_1(x) + C_1(x)M)(B_2(x) + C_2(x)M) = B_1(x)B_2(x) + B_1(x)C_2(x)M + B_2(x)C_1(x)M + B_2(x)C_2(x)M^2$. То есть, сделаем 4 `FFT` с малыми коэффициентами вместо 1 `FFT` с большими. Также заметим, что коэффициенты произведений не больше $M^2 10^6 = 10^9 10^6 = 10^{15}$, поэтому типа `long double` нам точно хватит.

8. **Цепочка умножений**
Если сделаем k прямых `FFT(nk)`, перемножим, затем обратное `FFT(nk)`, то будет время $\mathcal{O}(k^2 n + FFT(nk)) = \mathcal{O}(nk(k + \log n))$. А можно перемножить пары соседних многочленов за `FFT(2n)` каждую, потом новые пары соседних за `FFT(4n)` каждую и т.д. Суммарно за $\mathcal{O}(\frac{k}{2} FFT(2n) + \frac{k}{4} FFT(4n) + ... + FFT(kn)) = \mathcal{O}(nk \log(nk))$.

9. **(*) Задача о рюкзаке**
Есть рюкзаки A и B, объединим их в рюкзак C: $C[i] = \vee(A[j] \wedge B[i-j])$. Можно делать это с `FFT` за $s \log s$. После этого просто построим ДО на предметах, в вершине рюкзак на отрезке предметов. Запрос разбивается на $\log n$ рюкзаков, которые надо объединить.

10. **(*) Пентагональная теорема Эйлера**
Нам нужно посчитать $P(x) = \frac{1}{Q(x)}$, мы знаем Q, осталось обратить его за $\mathcal{O}(n \log n)$.
Обращение: пусть мы уже нашли первых k цифр $\frac{1}{Q(x)}$, обозначим их за I_k, $degI_k = k - 1$.

$$I_k(x)Q_k(x) = 1 + x^k R_k(x)$$

Здесь $Q_k(x)$ – младшие k коэффициентов многочлена Q.
Будем искать $I_{2k}(x) = I_k(x) + x^k T(x)$: $I_{2k}(x)Q(x) = 1 + x^k R_k(x) + x^k T(x)Q(x)$.
Теперь нужно, чтобы $R_k(x) + T(x)Q(x) = 1 + x^k R_{2k}(x)$, получаем $T(x) = -R_k(x)I_k(x)$.

$$I_{2k}(x) = I_k(x) - x^k R_k(x)I_k(x) = I_k(x)(1 - x^k R_k(x)) = I_k(x)(2 - I_k(x)Q_k(x))$$

Итого за два умножения многочленов длины k мы перешли к первым $2k$ коэффициентам.
Оценка времени работы: $\mathtt{FFT}(1) + \mathtt{FFT}(2) + \mathtt{FFT}(4) + \mathtt{FFT}(8) + \cdots = \mathcal{O}(n \log n)$.

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(4) Динамика по дереву**
   Сколько способов вырезать из полного бинарного дерева глубины k поддерево размера s, содержащее корень исходного? Где здесь `FFT`?

2. **(3) Обратное по модулю**
   Найти к числу x ($0 \leqslant x < m$) обратное по модулю m за $\mathcal{O}(\log^2 m)$. Длиннное m.

3. **(2) Циклические сдвиги**
   Даны A, B, $|A| = |B| = n$. Найти D – такой циклический сдвиг B,
   что скалярное произведение A и D максимально.

4. **(3) Поиск подкартинки**
   Даны две картины, заданные 256 оттенками серого. То есть даны матрицы целых чисел A и B. A по обоим размерам больше B. Найти такое наложение матрицы b на a, что суммарное квадратичное отклонение цветов минимально. То есть, найти такие i, j:

$$\sum_{x,y}(a[x,y] - b[x+i, y+j])^2 \to \min$$

5. **(4) AVL деревья**
   Дано $n < 2^{16} = N = 2^H$. И число $h \leqslant 16 = H$. Найти количество AVL деревьев глубины h из n вершин по модулю $3 \cdot 2^{18}{+}1$.
   a) (+2) Используя вещественное `FFT`, за $\mathcal{O}(NH^2)$.
   b) (+2) Используя `FFT` по простому модулю, за $\mathcal{O}(NH^2)$.

3.2. Дополнительная часть

1. **(3)** Перевод из 10-ой системы счисления в 2-ую быстрее квадрата.

2. **(5)** Интерполяция в произвольных точках быстрее квадрата.

3. **(4)** С помощью `FFT` за $\mathcal{O}^*(2^n)$ проверьте, можно ли вершины неорграфа покрасить в k цветов.

4. **(4)** Количество счастливых билетов из $2n$ цифр по модулю m за $\mathcal{O}(n \log n)$.

5. **(4)** Даны строка и текст. Оба могут содержать вопросы.
   Найти точное совпадение за $\mathcal{O}(1)$ вызовов Фурье. Алфавит – **не** константа!