1 Игры на графах

1.1 Определения

Симметричной комбинаторной игрой с полной информацией на графе (далее просто *игрой*) называется пара $< G(V, E), u >$ из ориентированного графа G и его вершины u.

Ходом в игре является замена вершины u на такую вершину v, что в графе G есть ребро из u в v.

Проигравшим, считается игрок, который не может сделать ход.

Позиция называется *выигрышной*, если игрок, который первым ходит в этой позиции может выиграть, вне зависимости от действий второго игрока. Позиция называется *проигрышной*, если игрок, который вторым ходит в этой позиции может выиграть, вне зависимости от действий первого игрока. Иначе позиция называется *ничейной*

1.2 Выигрышно-проигрышное разбиение графа

Введем семейства множеств вершин графа L_{2k} и W_{2k+1}, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определим эти множества по индукции.

$$L_0 = \{v \in V \mid \text{из } v \text{ нельзя сделать ход } \}$$
$$W_k = \{v \in V \mid \text{из } v \text{ есть ход в } L_{k-1}\}$$
$$L_k = \{v \in V \mid \text{из } v \text{ все ходы ведут в } W_{k-1}\}$$

Определим $W = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} W_{2k+1}$; $L = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} L_{2k}$

Теорема 1. *Множество W — есть множество выигрышиных вершин графа. Множество L — множество проигрышных вершин. Множество $D = V \setminus (W \cup L)$ — множество ничейных вершин графа.*

Будем считать, что проигрывающий игрок хочет максимально оттянуть поражение, а выигрывающий хочет выиграть как можно быстрее.

Теорема 2. *Множество W_{2k+1} — есть множество вершин, в которых существует стратегия за первого игрока, приводящая к выигрышу за $2k+1$ ход. Множество L_{2k} — есть множество вершин, в которых существует стратегия за второго игрока, приводящая к выигрышу за $2k$ ходов.*

Обе теоермы тривиально доказываются по индукции.

Разбиение вершин графа на множества W, L, D можно вычислить за время $O(E)$, используя следующий алгоритм

- Для каждой вершины будем хранить величину z_v, изначально равную исходящей степени вершины.

- Будем хранить очередь из еще не обработанных вершин, про которые уже известно какому из множеств они принадлежат.

- Изначально пометим как L_0 вершины, с исходящей степенью 0 и добавим их в очередь

- Пока очередь не пуста, достаем из нее первый элемент (обозначим за v), и если

  – $v \in L_{2k}$, добавим все еще не определенные вершины, из которых есть ребро в v в множество W_{2k+1} и положим их в очередь

  – $v \in W_{2k+1}$, уменьшим на 1 величину z_u для всех вершин из которых есть ребро в v. Те, у которых z_u обнулилиось добавим в множеств L_{2k+2} и в очередь.

Корректность алгоритма тривиально доказывается по индукции. Алгоритм работает за $O(E)$, так как каждая вершина будет обработана один раз, а время обработки вершина равно ее входящей степени.

1.3 Прямая сумма игр и эквивалентность

Прямой суммой игр $< G_1,\ v_1 >$ и $< G_2,\ v_2 >$ называется игра $< G_1 \times G_2,\ (v_1,\ v_2) >$.

Можно это понимать, как игра, в которой можно сделать ход в одной из двух исходных игр. Прямую сумму будем обозначать знаком $+$.

Несложно проверить, что по этой операции игры образуют моноид, нейтральным элементом в которой является игра $*0$, устроенная как одна вершина, из которой нет переходов.

Обозначим

$$v(A) = \begin{cases} -1, \text{если А — проигрышная} \\ \ \ 0, \text{если А — ничейная} \\ \ \ 1, \text{если А — выигрышная} \end{cases}$$

Назовем игры A и B *эквивалентными*, если $v(A+C) = v(B+C)$ для любой игры C. Будем обозначать это $A \cong B$.

Теорема 3. *Если* $A_1 \cong A_2$*,* $B_1 \cong B_2$*, то* $A_1 + B_1 \cong A_2 + B_2$*.*

Эта теорема, говорит, что операция прямой суммы согласована с определнной эквивалентностью.

1.4 Теория Гранди для ацикличных игр

Теорема 4. *Если* A *— игра на ацикличном графе, то* $A+A$ *— проигрышна.*

Теорема 5. *Если* L *— проигрышная игра, то* $v(L+C) = v(C)$*.*

Доказательство. Разбор случаев результата игры C, и явным построением стратегии. □

Теорема 6. *Если* L *— проигрышная игра, то* $L \cong *0$*.*

В частности $A + A = *0$, то есть классы эквивалентности игр на ацикличных графах образуют абелеву группу.

Игрой *ним* размера k (обозначатеся $*k$) называется игра, из которой есть переходы во все нимы с меньшими номерами.

Теорема 7. *Если* $i \neq j$*, то* $*i \ncong *j$*.*

Доказательство. Разный результата в сумме с $*\min(i, j)$. □

Теорема 8. $A \cong *i \Leftrightarrow v(A + *i) = -1$.

Определим функцию mex от множества неотрицательных целых чисел, как наименьшее неотрицательное целое число, которое не лежит в множестве.

Теорема 9. *Если* A *— игра на ацикличном графе, то* $A \cong *g(A)$*, для некоторого числа* $g(A)$*, причем, если из* A *есть переходы в игры, эквивалентные* $*g(A_1), *g(A_2), \ldots *g(A_k)$*, то* $g(A) = \mathrm{mex}\{g(A_1), g(A_2), \ldots g(A_k)\}$

Доказательство. Доказательство индукцией по длине пути до самой далекой терминальной вершины. □

Число $g(A)$ называется *функцией Гранди* игры A. Теорема дает конструктивный способ вычисления функции гранди за $O(E)$.

За $\oplus$ обозначим побитовый ксор двух чисел.

Теорема 10. $g(A+B) = g(A) \oplus g(B)$

Доказательство. Явное вычисление mex для нимов. □

1.5 Теория Смита

Теорема 11. *Пусть A — игра на графе. Пусть из A есть переходы в игры $A_1, \cdots A_k$, причем g — минимальное неотрицательное целое число, такое что ни одна из игр не эквивалентна $*g$. Пусть для каждой игры A_i выполнено либо*

- *A_i эквивалентно ниму*
- *из A_i есть переход в игру, эквивалентную $*g$*

Тогда $A \cong *g$.

Рассмотрим следующий алгоритм. Пока есть вершина, для которой можно найти эквивалентный ей ним, используя теорему, отметим ее как эквивалентную ниму. Если вершина не отмечена алгоритмом, назовем ее *неопределнной*

Теорема 12. *Неопределенная вершина не эквивалентна никакому ниму.*

Доказательство. Рассмотрим игру, которая в сумме с нимом проиграна за минимальное число ходов. □

Теорема 13. *Пусть существует игра B, такая что $A + B \cong *0$. Тогда $A \cong *i$ для некоторого i.*

Доказательство. Индукция по числу ходов до проигрыша в $A + B$ □

Теорема 14. *Если вершина неопределнная, то соответсвующая ей игра выигрышная или ничейная в сумме с любой другой.*

Для множества $K = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ обозначим за ∞_K игру из которой есть переходы в игры $*g_1, *g_2, \dots * g_k, \infty_K$ Игра ∞_K — выигрышная, если $0 \in K$, и ничейная иначе.

Теорема 15. *Каждая игра эквивалентна либо некоторому ниму, либо некоторой игре ∞_K, причем*

$*i + *j \cong *i \oplus j$

$*\infty_K + *i \cong \infty_{K \oplus i}$

$*\infty_K + *\infty_L \cong \infty_{\varnothing}$

Данная теорема полностью описывает вид моноида на играх. Игру, которой эквивалентна каждая вершина графа можно определить за время $O(E\sqrt{E})$, определяя игры эквивалентные каждому ниму по очереди, алгоритмом аналогичным ретроанализу. Функция гранди вершины не привосходит $\sqrt{2E}$, что оценивает время работы.