Игры и функционал Шпрага – Гранди

12.09.2005

1 Игры

Будем рассматривать конечные игры с полной информацией следующего вида: имеется ациклический ориентированный граф G и вершина в нём; двое игроков, ходя по очереди, двигают фишку по рёбрам графа, начиная с указанной вершины; кто не может сделать ход, проигрывает.

Теорема: в такой игре один из игроков имеет выигрышную стратегию.

Доказательство индукцией по максимальной длине партии. Для данной игры рассмотрим все игры, которые получаются из неё сдвигом фишки по рёбрам графа. Применим к ним предположение индукции. Если среди них есть проигрышная, то начальная игра выигрышная (и первым ходом надо пойти в проигрышную). Если все они выигрышные, то начальная позиция проигрышная (и второй игрок должен следовать выигрышной стратегии в одной из этих игр — в той, куда пойдёт первый).

Таким образом, все игры описанного вида разбиваются на два класса: выигрышные для начинающего игрока и проигрышные для него.

Определим *сумму* игр. Неформально говоря, мы играем на двух досках; на каждой стоит по фишке и за один ход можно сделать ход на любой из двух досок. Формально говоря, множество вершин нового графа является произведением двух множеств вершин, а ребро $(u, v) \to (p, q)$ существует, если $u = p$ и во втором графе есть ребро $v \to q$ или если $v = q$ и в первом графе есть ребро $u \to p$.

Пример. Рассмотрим игру, позициями (вершинами) которой являются натуральные числа из отрезка $[0, N]$, а ход состоит в уменьшении числа (имеются рёбра $i \to j$ при $j < i$). Сама по себе эта игра I_N совсем проста (в ненулевой позиции игрок можно выиграть в один ход, пойдя в нулевую).

Сумму двух игр I_n и I_m можно описать так: есть две кучки спичек по n и m штук; игрок может взять любое число спичек, но только из одной кучи, кто не может сделать ход (останется без спичек), проигрывает. Здесь проигрышными позициями являются те, где спичек поровну ($m = n$): второй игрок может выиграть, повторяя ходы первого (выравнивая число спичек). Все остальные позиции (при $m \neq n$) выигрышные: первым ходом надо сравнять число спичек, поставив противника в проигрышную позицию.

Сумма трёх игр — известная из школьных математических кружков игра ним; оказывается, что позиция (I_n, I_m, I_k) проигрышная тогда и только тогда, когда побитовая сумма по модулю 2 двоичных чисел n, m, k равна нулю. Это будет следовать из доказываемых далее общих утверждений.

Замечание. Какова бы ни была игра I, её сумма $I + I$ с самой собой всегда проигрышная для начинающего. (В самом деле, как и со спичками, второй игрок может повторять ходы первого симметрично.)

Более общее утверждение: каковы бы ни были игры I и J, в играх $I + I + J$ и J выигрывает один и тот же игрок. В самом деле, пусть первый умеет выигрывать в J. Тогда он начинает играть в $I + I + J$ как в J, но если противник отвлекается от J и делает ход в одной из игр I, то на него отвечают тем же ходом в другой игре I. Аналогично и для второго: он должен на ходы в I отвечать симметрично, а на ходы в J — как раньше.

2 Взаимное моделирование

Мы рассмотрим три разных отношения эквивалентности на играх.

Самое сильное отношение эквивалентности — изоморфизм графов (и соответствие начальных вершин). Тут совсем ясно, что по существу мы имеет дело с одной и той же игрой.

Второе, более слабое отношение эквивалентности: взаимное моделирование. Так будет, например, если мы в графе с циклами “расклеим” эти циклы, продублировав вершины и превратив граф в дерево.

Формальное определение дадим так: игры (G_1, s_1) и (G_2, s_2) (указаны граф и начальная позиция — одна из его вершин) моделируют друг друга, если существует соответствие между вершинами G_1 и G_2 (не обязательно взаимно однозначное, а просто отношение, то есть подмножество $G_1 \times G_2$), при котором

• начальная вершина s_1 соответствует начальной вершине s_2;

• если вершине $v_1 \in G_1$ соответствует вершина $v_2 \in V_2$ и из v_1 есть ребро в w_1 (в графе G_1), то существует вершина w_2, соответствующая w_1, в которую ведёт ребро из v_2 (в графе G_2);

Легко понять, что в этом случае в этих играх выигрывает один и тот же игрок (начинающий или его противник).

Лемма: это определение задаёт отношение эквивалентности на играх. (По существу, надо проверить лишь транзитивность, но и это просто.)

Замечание: вершины графа, в которые нельзя попасть по рёбрам из начальной вершины, можно выбросить, не нарушая эквивалентности (им ничего не будет соответствовать, и это не страшно).

В каждом классе эквивалентности можно выбрать естественного представителя, удалив все недостижимые вершины, расклеив все циклы и склеив все изоморфные подграфы. Формально это проще всего сделать так.

Каждой игре S поставим в соответствие некоторое множество $\alpha(S)$ индукцией по максимальной длине партии. Если нельзя сделать ни одного хода, множество пустое. Если можно сделать ходы, приводящие к играм $S_1, \ldots, S_n$, то

$$\alpha(S) = \{\alpha(S_1), \ldots, \alpha(S_n)\}.$$

(Некоторые из $\alpha(S_i)$ могут совпадать, тогда число элементов в $\alpha(S)$ меньше n.)

Множества $\alpha(S)$ *наследственно конечны* (сами конечны, элементы конечны, элементы элементов конечны и так далее). Напомним, что аксиома фундирования в теории множеств запрещает бесконечные цепочки

$$\text{множество} \to \text{элемент} \to \text{элемент элемента} \to \ldots,$$

так что наследственно конечное множество может быть получено за конечное число шагов “собирания” уже построенных наследственно конечных множеств в одно множество.

Каждое наследственно конечное множество A можно рассматривать как начальную позицию игры $\overline{A}$, в которой за один шаг разрешается переходить от множества к его элементу (а позиции — все множества, в которые так можно попасть). Очевидно, $\alpha(\overline{A}) = A$.

Лемма. Всякая игра S взаимно моделируется игрой $\overline{\alpha(S)}$. Две игры S и S' взаимно моделируются тогда и только тогда, когда $\alpha(S) = \alpha(S')$.

Доказательство леммы. Построим соответствие между позициями игр S и $\alpha(S)$. Для каждой позиции s в игре S рассмотрим игру S_s, которая отличается от S лишь начальной позицией (теперь равной s).

Определим соответствие, считая, что позиции s в игре S соответствует множество $\alpha(S_s)$ (если позиция s достижима из начальной) или ничего не соответствует (если s недостижима).

Заметим, что для достижимой позиции множество $\alpha(S_s)$ является элементом элемента… элемента множества $\alpha(S)$, так как переход по ребру в игре S соответствует переходу от множества к его элементу. Таким образом, множество $\alpha(S_s)$ действительно является позицией в игре $\alpha(S)$.

Из определения видно, что если позиция s соответствует $\alpha(S_s)$ и из s можно перейти в некоторую позицию t, то $\alpha(S_t)$ является элементом $\alpha(S_s)$. Напротив, любой элемент множества $\alpha(S_s)$ по определению есть $\alpha(T)$ для некоторой игры T, которая получается из S_s после одного хода, то есть равен $\alpha(S_t)$ для некоторой позиции t, в которую можно перейти из s. Первая часть леммы доказана.

Докажем вторую часть леммы в такой форме: если две игры S и T моделируют друг друга, и позиции s и t соответствуют друг другу при этом моделировании, то $\alpha(S_s) = \alpha(T_t)$. Это доказывается индукцией по числу оставшихся ходов. Если из s нельзя сделать хода, то его нельзя сделать и из t (и наоборот), и оба множества пусты. Если ход сделать можно, то элементами множеств $\alpha(S_s)$ и $\alpha(T_t)$ будут значения α для всех игр, возникающих после ходов в S и T соответственно. Условие моделирования и предположение индукции гарантирует, что любой элемент одного из множеств входит в другое, так что они совпадают.

Лемма доказана.

3 Эквивалентность по Шпрагу – Гранди

Две игры S_1 и S_2 назовём *эквивалентными по Шпрагу – Гранди*, если для любой игры T в играх $S_1 + T$ и $S_2 + T$ выигрывает один и тот же игрок.

Замечание. Если игры S_1 и S_2 изоморфны, то и игры $S_1 + T$ и $S_2 + T$ изоморфны. Поэтому изоморфные игры эквивалентны (по Шпрагу – Гранди; для краткости мы будем эти слова опускать). Более того, если игры S_1 и S_2 моделируют друг друга, то и $S_1 + T$ и $S_2 + T$ взаимно моделируют друг друга (при этом соответствие сохраняет вторые компоненты и продолжается с первых). Поэтому взаимно моделирующие игры эквивалентны.

Если игры S_1 и S_2 эквивалентны, то и игры S_1+U и S_2+U эквивалентны: сложение игр коммутативно и ассоциативно (с точностью до изоморфизма), и для любой игры T можно переписать

$$(S_1 + U) + T \text{ и } (S_2 + U) + T$$

как

$$S_1 + (U + T) \text{ и } S_2 + (U + T),$$

и сослаться на определение.

Таким образом, на классах эквивалентных игр можно определить сложение. Нейтральным элементом для этого сложения будет, очевидно, игра из единственной позиции.

Более удивительно, что возникающая полугруппа является группой, то есть что у всякого элемента есть противоположный. Этот противоположный — он сам. По существу мы это уже отмечали: по определению $A + A = 0$ означает, что в играх $A + A + B$ и B (при любом B) выигрывает один и тот же игрок.

Возникает вопрос: что это за группа? Ответ простой (но удивительный): это счётная сумма групп $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то есть группа последовательностей нулей и единиц (с конечным числом единиц); сложение — покомпонентное. Другими словами, каждой игре можно поставить в соответствие натуральное число так, что эквивалентным играм соответствует одно и то же натуральное число, а не эквивалентным — разное, и сумме игр соответствует поразрядная сумма чисел по модулю 2 (в двоичной записи). Это соответствие называют *функционалом Шпрага – Гранди.*

Доказательство этого начнём с такого определения. Пусть фиксирована игра. Для каждой позиции s (вершины графа) определим натуральное (=целое неотрицательное) число $v(s)$, называемое *оценкой* этой позиции, по таким правилам:

- если из позиции s нельзя сделать ход, то её оценка $v(s)$ равна нулю;
- если из s можно сделать ходы в позиции $s_1, \ldots, s_k$, то $v(s)$ — наименьшее натуральное число, не равное ни одному из $v(s_1), \ldots, v(s_k)$.

(Первое правило можно считать частным случаем второго.)

Пример: в игре, где можно забирать любое число спичек из кучки (пока есть), оценка позиции равна числу спичек.

Лемма о нулевом значении: позиция проигрышная тогда и только тогда, когда её оценка равна нулю.

Доказательство индукцией по числу оставшихся ходов: если оценка равна нулю, то любой ход ведёт в позицию с ненулевой оценкой (по определению), то есть выигрышную (по индукции); если оценка не равна нулю, то есть ход в нулевую позицию (по определению), то есть проигрышную (по индукции).

Таким образом, с точки зрения оценки "все проигрышные позиции проигрышны одинаково, но выигрышные бывают выигрышны по-разному".

Теперь о поразрядном сложении натуральных чисел по модулю 2. Странное появление этой операции (которую мы обозначим $i \oplus j$) отчасти объясняется следующим её свойством:

Лемма о поразрядном сложении: $i \oplus j$ есть наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел $i' \oplus j$ и $i \oplus j'$ при $i' < i$ и $j' < j$.

Доказательство. Если $i' < i$, то $i' \neq i$ и потому $i \oplus j \neq i' \oplus j$ (поразрядное сложение обратимо). Аналогично и для $i \oplus j'$, так что $i \oplus j$ действительно не встречается. Остаётся доказать, что все меньшие числа встречаются. Пусть $k < i \oplus j$. Рассмотрим самый старший разряд, где в k единица, а в $i \oplus j$ нуль. В одном из чисел i и j в этом разряде стоит единица; пусть, например, в i. Тогда, положив $i' = k \oplus j$, видим, что старшие разряды не изменились, а в выбранном разряде единица заменилась нулём, так что $i' < i$, что и требовалось.

Эта лемма узаконивает индуктивное определение поразрядной суммы как наименьшего числа, отсутствующего среди сумм с уменьшенным слагаемым (одним из).

Лемма о сумме: оценка позиции в сумме игр равна поразрядной сумме оценок позиций в каждой из игр.

Доказательство. По существу нам надо проверить, что если число x есть наименьшее натуральное число, отсутствущее среди $x_1, \ldots, x_k$, а число y — наименьшее отсутствующее среди $y_1, \ldots, y_l$, то число $x \oplus y$ — наименьшее отсутствующее среди

$$x \oplus y_1, \ldots, x \oplus y_l, x_1 \oplus y, \ldots, x_k \oplus y$$

Это утверждение обобщает предыдущую лемму и одновременно легко следует из неё. В самом деле, $x \oplus y$ не совпадает ни с одним из этих чисел (в силу обратимости по каждому аргументу). С другой стороны, среди $x_1, \ldots, x_k$ есть все числа, меньшие x (а также некоторые большие, но это не важно), а среди $y_1, \ldots, y_l$ — все числа, меньшие y, поэтому из предыдущей леммы следует, что среди выписанных чисел есть все числа, меньшие $x \oplus y$.

Теперь уже легко доказать основное утверждение.

Теорема Шпрага – Гранди. Две игры эквивалентны по Шпрагу – Гранди тогда и только тогда, когда оценки начальных позиций в них равны.

Доказательство. Если оценки начальных позиций в играх S_1 и S_2 равны некоторому v, то для любой игры T оценка начальной позиции в играх $S_1 + T$ и $S_2 + T$ равна $v \oplus v(T)$, где $v(T)$ — оценка начальной позиции в игре T (лемма о сумме). Остаётся сослаться на лемму о нулевом значении, по которой результат игры определяется оценкой.

Напротив, если начальные позиции в играх S_1 и S_2 имеют разные оценки, то положим $T = S_1$. Тогда игра $S_1 + T$ будет проигрышной (начальная позиция имеет оценку нуль), а игра $S_2 + T$ будет выигрышной (начальная позиция имеет ненулевую оценку $v(S_1) + v(S_2)$.

Замечание: вместо прибавления $T = S_1$ можно было взять любую другую игру с той же оценкой $v(S_1)$, например, игру с $v(S_1)$ спичками. Таким образом, в определении эквивалентности можно ограничиться простейшими играми с одной кучкой спичек в качестве "пробных".

Всё обещанное доказано. В качестве следствия получаем критерий выигрыша в игре ним (она есть сумма нескольких игр с одной кучкой, и надо поразрядно сложить оценки позиций)

4 Что ещё

В принципе не обязательно рассматривать конечные графы, надо лишь, чтобы не было бесконечных партий (путей по рёбрам, бесконечных вперёд).

Тогда, видимо, вместо наследственно конечных множеств получаются все множества (и это можно делать по трансфинитной индукции?)

Что будет с функционалом Шпрага – Гранди: продолжается ли он на все множества так же хорошо? оценки могли бы быть ординалами

Есть обобщение класса игр, предложенное Конвеем - что это такое? (Статья Шляйхера)